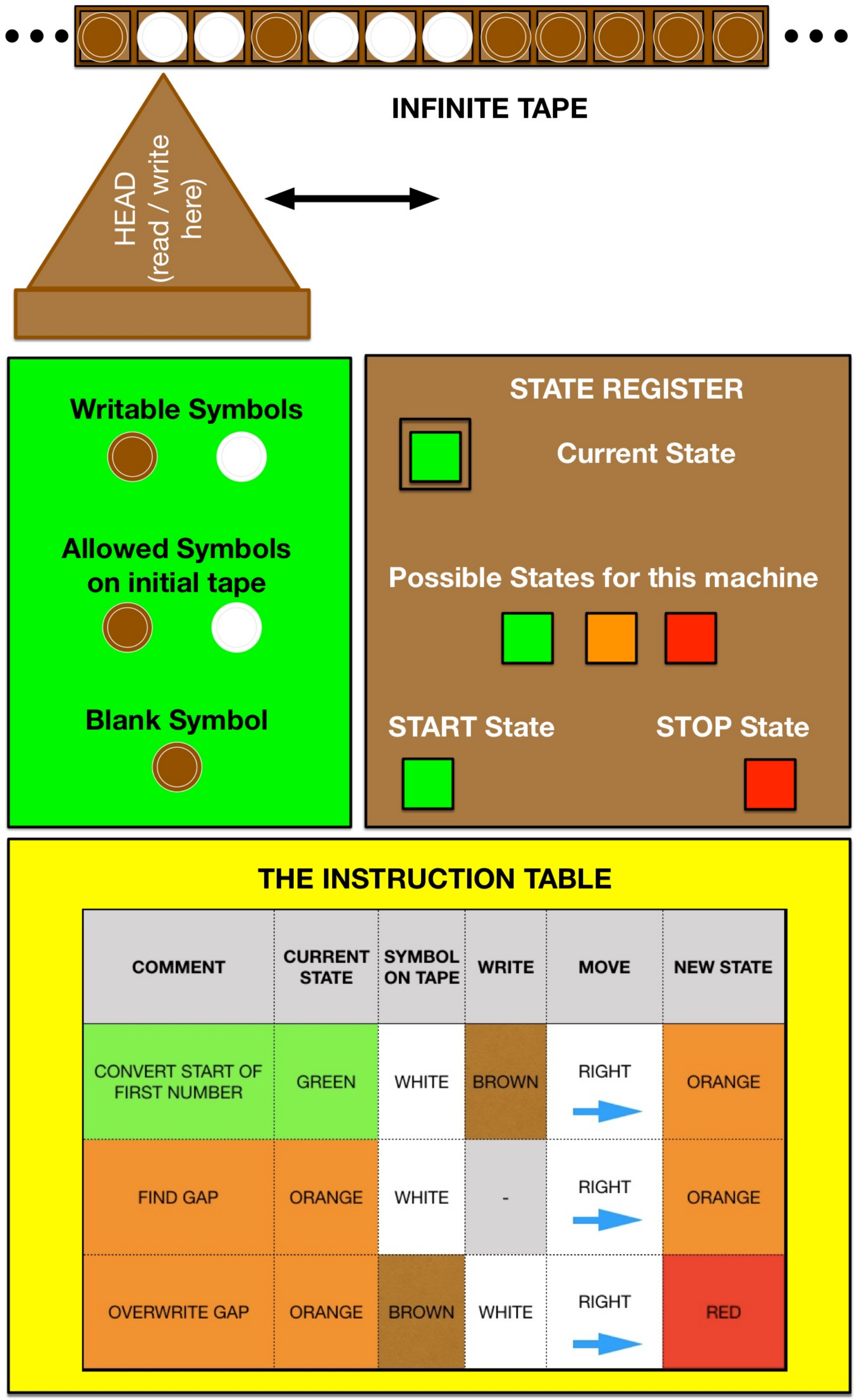


Máquinas de Turing

Autômatos, Linguagens e Computação

Pontifícia Universidade Católica de Campinas

Prof. Dr. Denis M. L. Martins

Objetivos de Aprendizagem

- Apresentar o conceito e funcionamento de Máquinas de Turing (MT).
- Explorar variações como Máquinas de Turing com fitas múltiplas e não-determinísticas.
- Discutir a relação entre MTs e a definição de problemas decidíveis e indecidíveis.

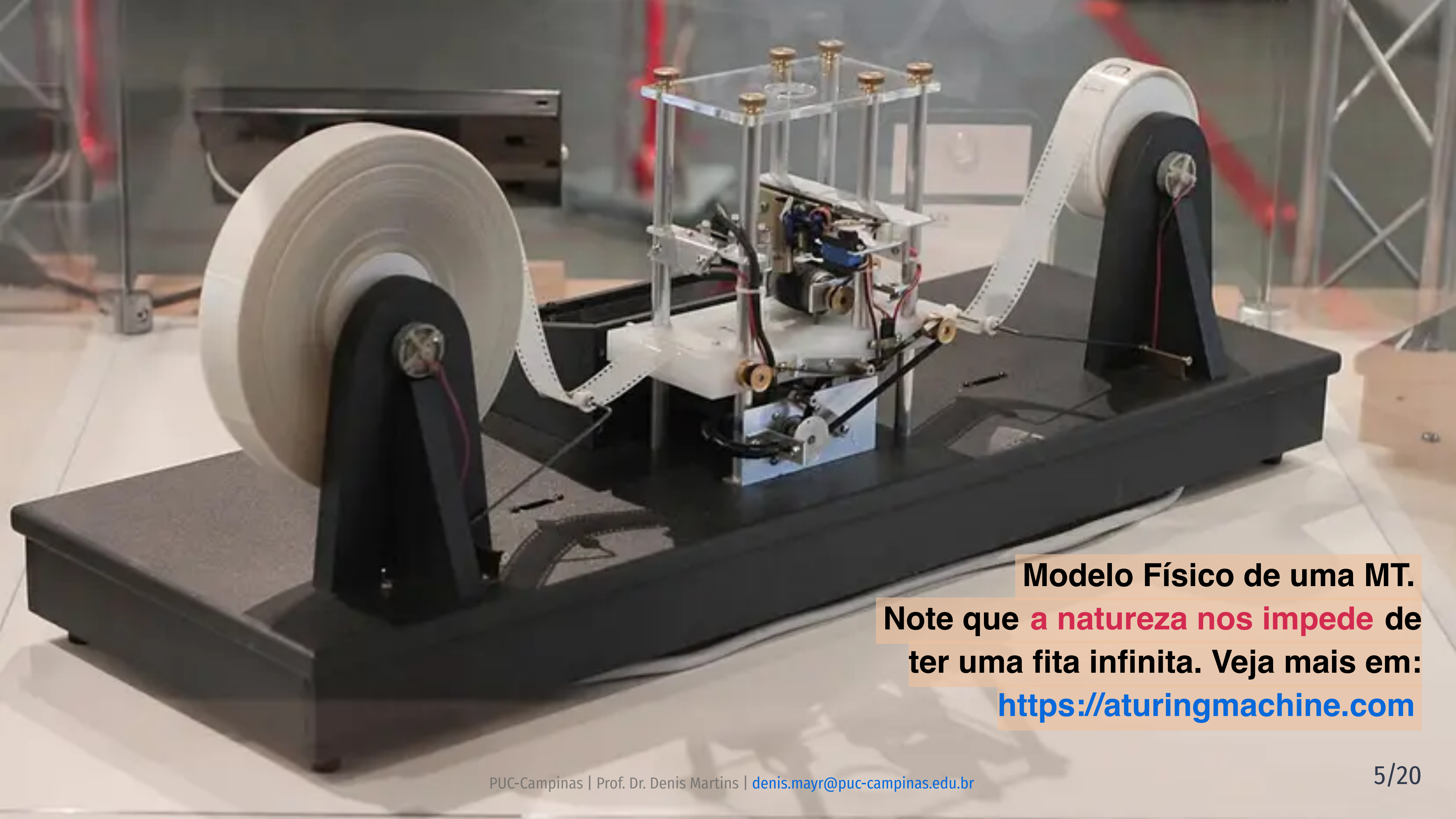
Alan Turing

- Nasceu em 23 de junho de 1912 em Londres, Inglaterra
- Aos 24 anos, em 1936, propõe as "A-Machines": Máquina de Turing, um modelo abstrato de computação com o poder dos computadores modernos
  - Formalizou o conceito de algoritmo e investigar quais problemas poderiam ser resolvidos computacionalmente. Limites da Computação.
  - Fundamentou os conceitos de Computabilidade e Complexidade.
  - Trabalho seminal: "**On computable numbers, with an application to the Entscheidungsproblem**"
- Segunda Guerra Mundial: Trabalhou em Bletchley Park, liderando a equipe que decifrou o código Enigma

Máquinas de Turing

Anatomia - Componentes Básicos

- Fita de entrada infinita (para a direita)
- Cabeça/Cursor de leitura/escrita
  - Pode se mover para esquerda ou para direita
- Estados e função de transição
- Dois estados especiais com efeito imediato
  - q_{aceita}: a MT para e aceita a cadeia de entrada w
  - $q_{rejeita}$: a MT para e rejeita a cadeia de entrada w
- Nota: semelhante a um AF, mas com memória ilimitada e acesso irrestrito.



Modelo Físico de uma MT.
Note que a natureza nos impede de ter uma fita infinita. Veja mais em:
https://aturingmachine.com

Definição de Máquina de Turing

- Definição (Máquina de Turing): uma MT é uma 7-upla $M = (Q, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, q_{aceita}, q_{rejeita})$, onde:
    - Q é o conjunto de estados
    - Σ é o alfabeto de entrada
    - Γ é o alfabeto da fita ($\sqcup \in \Gamma$ e $\Sigma \subset \Gamma$)
    - $\delta : Q \times \Gamma \to Q \times \Gamma \times \{E, D\}$ é a função de transição no formato $\delta(q, a) = (p, b, S)$
        - S é o sentido do movimento do cursor e assume para Esquerda ou Direita
    - q_0 é o estado inicial
    - q_{aceita} é o estado de aceitação
    - $q_{rejeita}$ é o estado de rejeição $q_{aceita} \neq q_{rejeita}$

Funcionamento de uma Máquina de Turing

- O Funcionamento geral de uma MT M é dado como se segue:
  - A cadeia $w = w_1 w_2 \dots w_n$ é escrita na fita
  - A MT começa com o cursor na posição mais à esquerda
  - A computação procede de acordo com a função de transição $\delta(q, a) = (p, b, \{E, D\})$:
    - Quando em um estado q, e lê um símbolo 'a':
      - M muda para o estado p
      - Escreve 'b' na fita no lugar de 'a'; e
      - Move o cursor para a esquerda ou para direita.
  - A computação continua até que q_{aceita} alcance ou $q_{rejeita}$ e a máquina para.
- **Pergunta**: O que acontece se o cursor estiver mais à esquerda e a transição tenta mover o cursor à esquerda com $\delta(q, a) = (p, b, E)$?
- **Resposta**: Nenhum movimento é feito.

$L = \{ a^n b^n c^n \mid n \geq 1 \}$

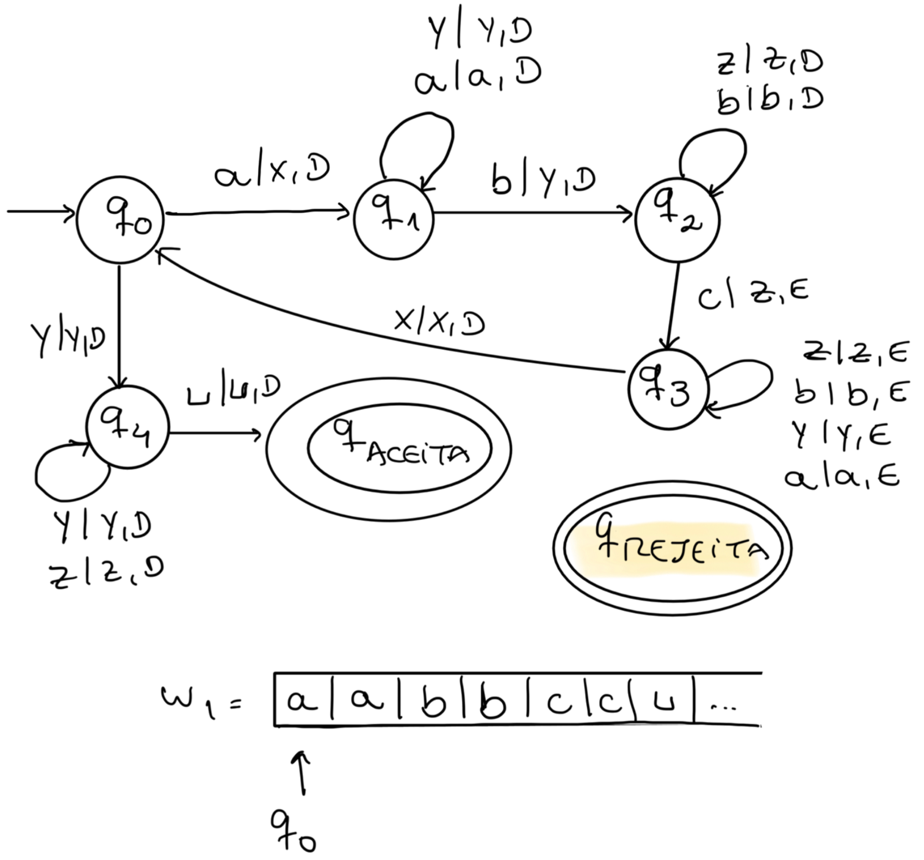
Exemplo

Funcionamento de uma MT que reconhece $L_1 = \{a^n b^n c^n \mid n \geq 1\}$.

O diagrama de estados e transições está ilustrado ao lado.

Vamos verificar a cadeia de exemplo $w_1 = aabbcc$ passo a passo.

Exercício: Descreva o diagrama de estados de uma MT que reconhece $L_2 = \{w\#w \mid w \in \{0,1\}^*\}$



Configuração de uma Máquina de Turing

Descrição instantânea

- Uma configuração de uma MT descreve:
  - Seu estado atual;
  - O conteúdo da fita; e
  - A posição atual do cursor de leitura/escrita.
- Representação: $uqv, \text{ com } u, v \in \Gamma^* \text{ e } q \in Q$.
- Dizemos que uma configuração C_1 origina C_2se a MT puder ir de C_1 a C_2 em um único passo, denotado $C_1 \Rightarrow C_2$.
- Exemplos: $q_0 101101111, 00q_3 1101111, 0q_2 00101111$

Definição de aceite

Dizemos que uma MT M aceita uma cadeia $w = w_1 w_2 \ldots w_n$ se existe uma sequência de configurações:

$$C_1 \Rightarrow C_2 \Rightarrow C_3 \Rightarrow \ldots \Rightarrow C_k$$

onde:

- (1) C_1 é a configuração inicial
- (2) Cada C_i origina C_{i+1}
- (3) C_k é uma configuração de aceitação $w_1 \ldots w_{i-1} q_{aceita} w_i \ldots w_n$

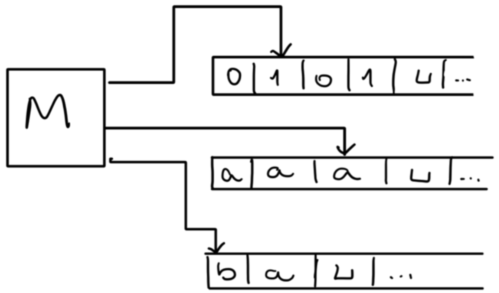
A MT rejeita w se em (3) o estado de configuração é de rejeição.

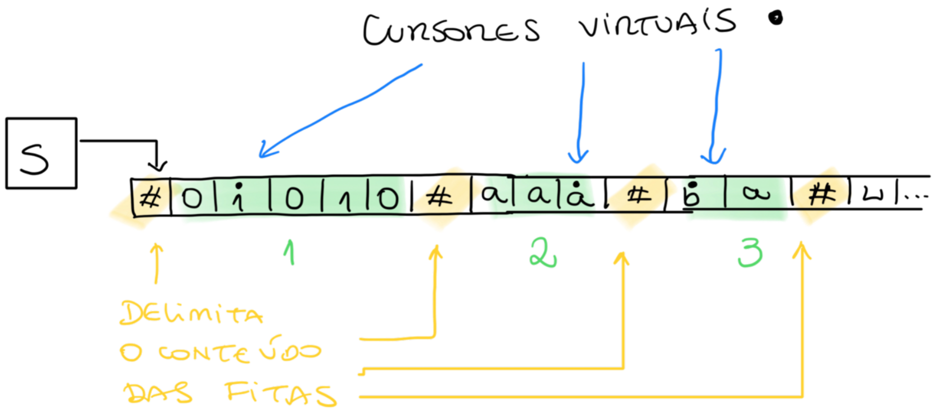
Variantes de uma MT

- Expandem o modelo padrão para explorar diferentes aspectos de computação.
- MT Multifitas: possuem várias fitas para leitura e escrita simultânea, aumentando a eficiência.
- MT Não-Determinísticas: permitem múltiplos caminhos de execução ao mesmo tempo.
- Essas variações ajudam a entender questões como eficiência, paralelismo e universalidade no processamento computacional.
- Robustez: Reconhecem a mesma classe de linguagens. Ou seja, possuem o mesmo poder computacional.

MT Multifitas

- Utiliza várias fitas, cada uma com seu próprio cursor de leitura/escrita.
- Isso permite que a máquina leia e escreva em múltiplas posições simultaneamente, tornando-a mais eficiente em certos problemas.
- A função de transição é ajustada para lidar com o estado atual e os símbolos lidos em todas as fitas, determinando o próximo estado, os símbolos a serem escritos e os movimentos das cabeças de leitura/escrita em cada fita.
- Equivalência ao modelo padrão: qualquer multifita pode ser simulada por uma MT de fita única.
- Ideia de prova: Concatenar as k fitas na fita S com o delimitador $\# \notin \Gamma$. A posição de cada cursor é representada pelo símbolo $\dot{w}$. Simular a função de transição: $\delta(q, a_1, a_2, \ldots, a_k) = (p, b_1, b_2, \ldots, b_k, E, D, \ldots, P)$



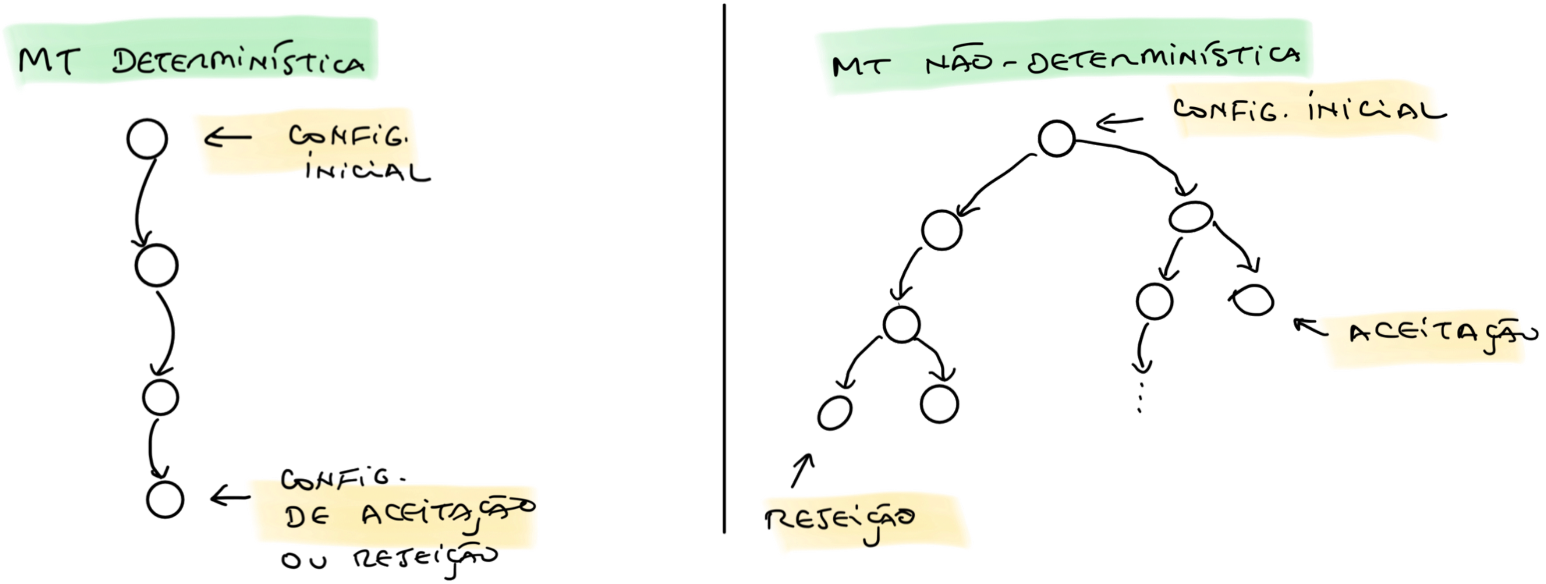


Pergunta

- A definição que vimos é de uma MT determinística. Qual modificação precisa ser feita para torná-la Não-Determinística?
    - Alterar Γ
    - Alterar δ
    - Alterar Σ
- Resposta: B

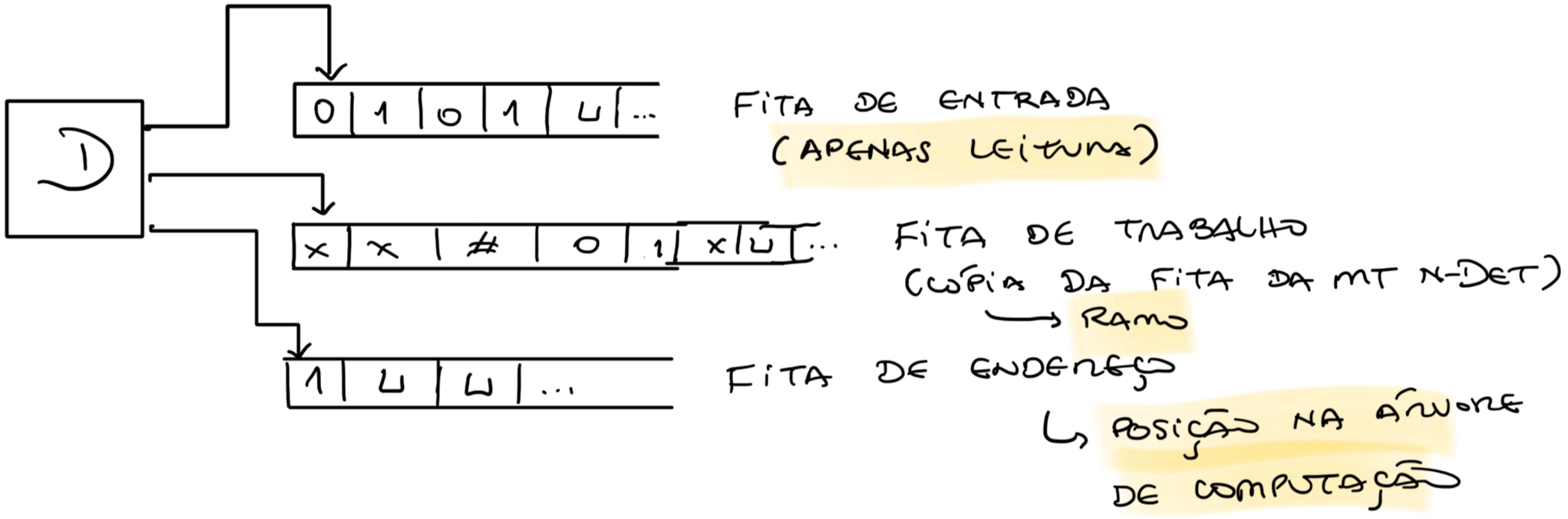
MT Não-Determinística

- Modificamos a função de transição: $\delta : Q \times \Gamma \rightarrow 2^{(Q \times \Gamma \times \{E,D\})}$
- Assim como nos Autômatos Finitos, o não-determinismo não acrescenta poder computacional às MTs.



MT Não-Determinística

- **Equivalência**: Uma MT Não-Determinística é equivalente a uma MT padrão
- Uma MT Não-Determinística aceita uma cadeia se pelo menos um ramo leva ao estado de aceitação.
- **Ideia de Prova**: Simular uma MT Não-Determinística com uma MT de 3 fitas. Busca em largura na árvore de computação.



Linguagem Reconhecida por uma Máquina de Turing

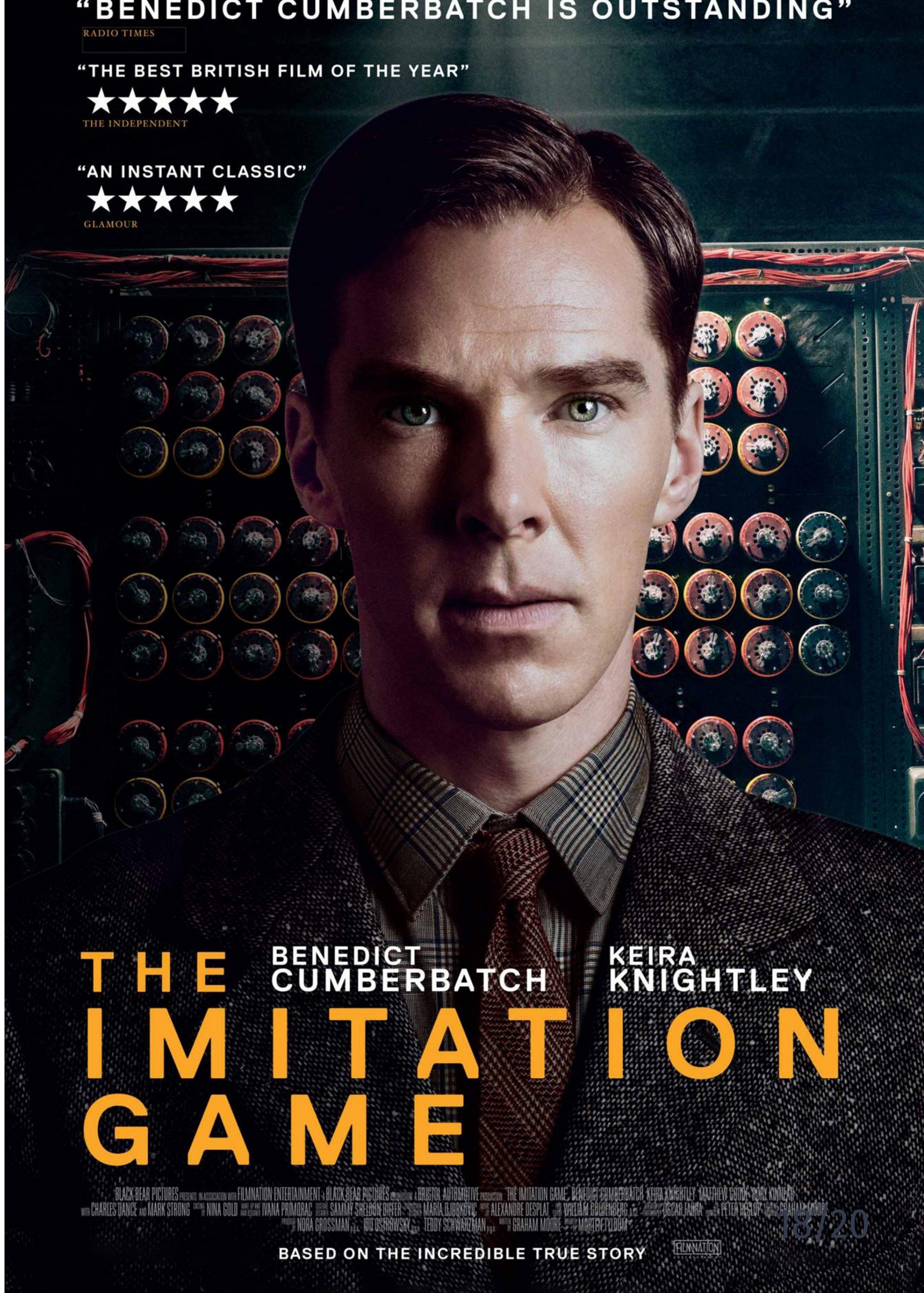
- Todas as cadeias aceitas por uma MT M formam a linguagem de M, ou seja, a linguagem reconhecida por M, denotada $L(M)$.
- Note que $w \notin L(M)$, então pode:
  - Rejeitar w: parar no estado de rejeição; ou
  - Nunca parar: entrar em loop infinito
- O conjunto de linguagens que podemos aceitar usando uma MT é chamado linguagens recursivamente enumeráveis.
- Linguagens recursivas são aquelas que podem ser decididas por uma MT que sempre para.

Tese de Church-Turing

- A Tese Church-Turing propõe que qualquer cálculo ou problema que possa ser resolvido por um algoritmo pode ser realizado por uma Máquina de Turing.
- Embora não seja formalmente provada, é amplamente aceita como a definição prática de computabilidade.

Dica Cultural

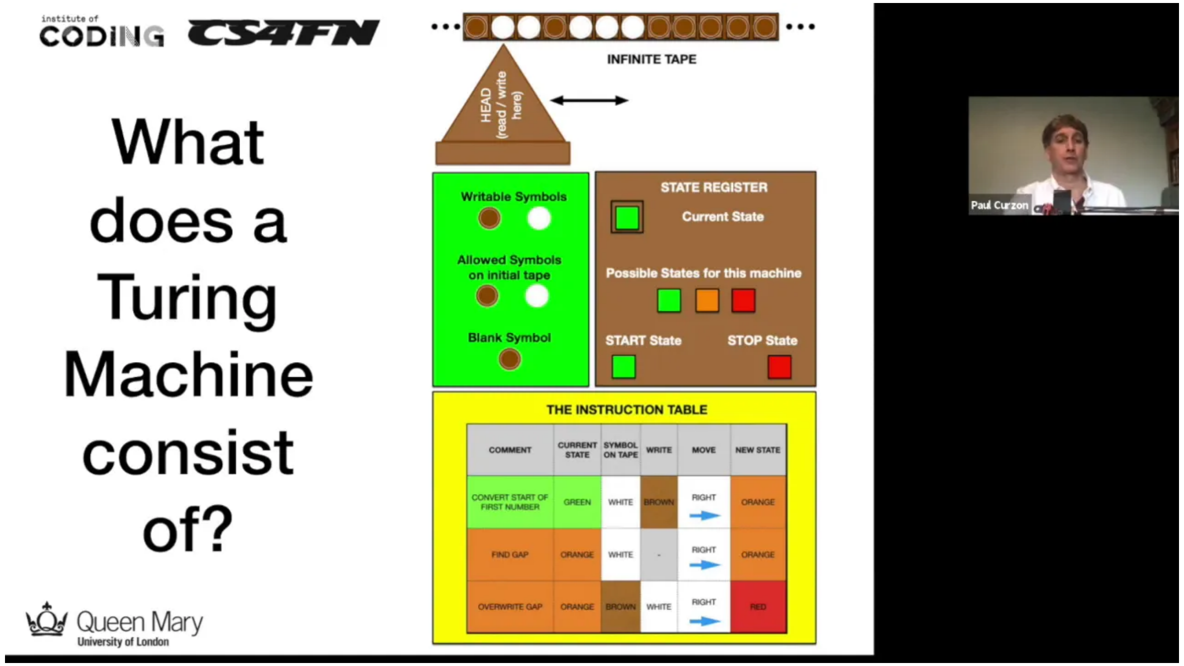
- Filme: O Jogo da Imitação (2014)
    - Atualmente, 8/10 no IMDb
    - Um pouco da história de Turing
- Doodle de 23 Junho de 2012 (Google)
    - https://doodles.google/doodle/alan-turings-100th-birthday/
    - Código aberto (Javascript)
        - https://github.com/google/turing-doodle



Mais uma Dica

YouTube: https://www.youtube.com/watch?v=YzXoFldEux4.
Baseado no artigo https://arxiv.org/pdf/1904.09828.
Código Python: https://github.com/Cerno-b/mtg-turing-machine

Mais outra Dica



YouTube: https://youtu.be/soJ3FPvs7QI?si=rLK59BfBtNpnLUVZ.
Leia mais em https://teachinglondoncomputing.org/turingmachine/