# Visão Computacional

## Gradiente Descendende e Backpropagation

Prof. Dr. Denis Mayr Lima Martins

Pontifícia Universidade Católica de Campinas

# Recap: Uma CNN é apenas uma grande equação

Considere o esboço de equação de uma CNN:

$$z_k = \sum_{j=1}^{D} \Big[ W_{jk}^{(\ell)} \left( \text{flatten}\big(\text{pool}\big(\phi\big(\text{conv}(x; W^{(c)}) + b^{(c)}\big)\big)\big)_j \right] + b_k^{(\ell)}$$

- Durante o treinamento, precisamos ajustar cada parâmetro da CNN de forma a diminuir o erro da rede.
- O problema principal do treinamento é a otimização dos parâmetros da rede.

# Objetivos de Aprendizagem

- **Conceituar e Aplicar** a otimização de funções de custo em *Deep Learning*.
- **Descrever** as variantes do algoritmo *Gradient Descent*.
- **Compreender e Derivar** o funcionamento de *Back-Propagation*.

# Motivação: O Desafio do Treinamento

O treinamento de um modelo de *Deep Learning* (DL) é um problema de otimização.

- **Objetivo:** Encontrar o conjunto de parâmetros $(\mathbf{w}, \mathbf{b})$ de uma rede neural que minimiza uma função de custo (ou perda) $\mathcal{L}$.
- A função de custo $\mathcal{L}(\mathbf{w}, \mathbf{b})$ mede o quão "ruim" o modelo $f(\mathbf{x}; \mathbf{w}, \mathbf{b})$ é em mapear as entradas $\mathbf{x}$ para as saídas desejadas $\mathbf{y}$.

$$\hat{\boldsymbol{\phi}} = \operatorname{argmin}_{\boldsymbol{\phi}} \left[\mathcal{L}(\boldsymbol{\phi})\right]$$

Onde $\boldsymbol{\phi}$ representa o vetor de todos os parâmetros $(\mathbf{w}, \mathbf{b})$ do modelo.

# Função de Custo: O que estamos minimizando?

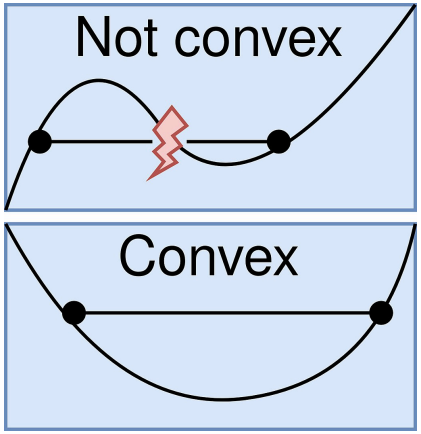
A função de custo mais comum, especialmente para problemas de regressão, é o **Erro Quadrático Médio (MSE)**:

- O MSE calcula a média dos erros quadráticos entre a saída prevista pelo modelo $f(\mathbf{x}_n; \mathbf{w}, \mathbf{b})$ e a saída real $\mathbf{y}_n$ para $N$ exemplos de treinamento.

$$\mathcal{L}(\mathbf{w}, \mathbf{b}) = \frac{1}{N} \sum_n (f(\mathbf{x}_n; \mathbf{w}, \mathbf{b}) - \mathbf{y}_n)^2$$

- Para classificação, a **Função de Perda de Entropia Cruzada** (ou *Cross-Entropy Loss*) é preferida, pois deriva naturalmente da maximização da verossimilhança.

**O Desafio:** A função $\mathcal{L}$ geralmente é **não-convexa** para redes profundas, possuindo múltiplos mínimos locais e pontos de sela (saddle points).




Função Convexa x Não-Convexa. Fonte: Wikipedia.

# O Conceito de Gradiente ($\nabla \mathcal{L}$)

Para encontrar o ponto de mínimo de $\mathcal{L}(\mathbf{w})$, utilizamos o **gradiente**, que é um vetor de derivadas parciais.

- O gradiente $\nabla \mathcal{L}(\mathbf{w})$ aponta na direção de **máximo crescimento** da função.
- Portanto, o oposto do gradiente, $-\nabla \mathcal{L}(\mathbf{w})$, aponta na direção de **descida mais íngreme** (steepest descent).

**Definição Matemática:** O gradiente é o mapeamento que leva um vetor de parâmetros $\mathbf{w}$ a um vetor de derivadas parciais:

$$\nabla \mathcal{L}(\mathbf{w}) = \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial w_1}, \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial w_2}, \ldots, \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial w_D} \right)^T$$

> *Veremos mais detalhes na lousa.*

# Gradient Descent

O algoritmo *Gradient Descent* (GD) é o método geral de minimização que usa informações lineares locais para mover-se iterativamente em direção a um mínimo (local).

**O Algoritmo em 2 Passos:**

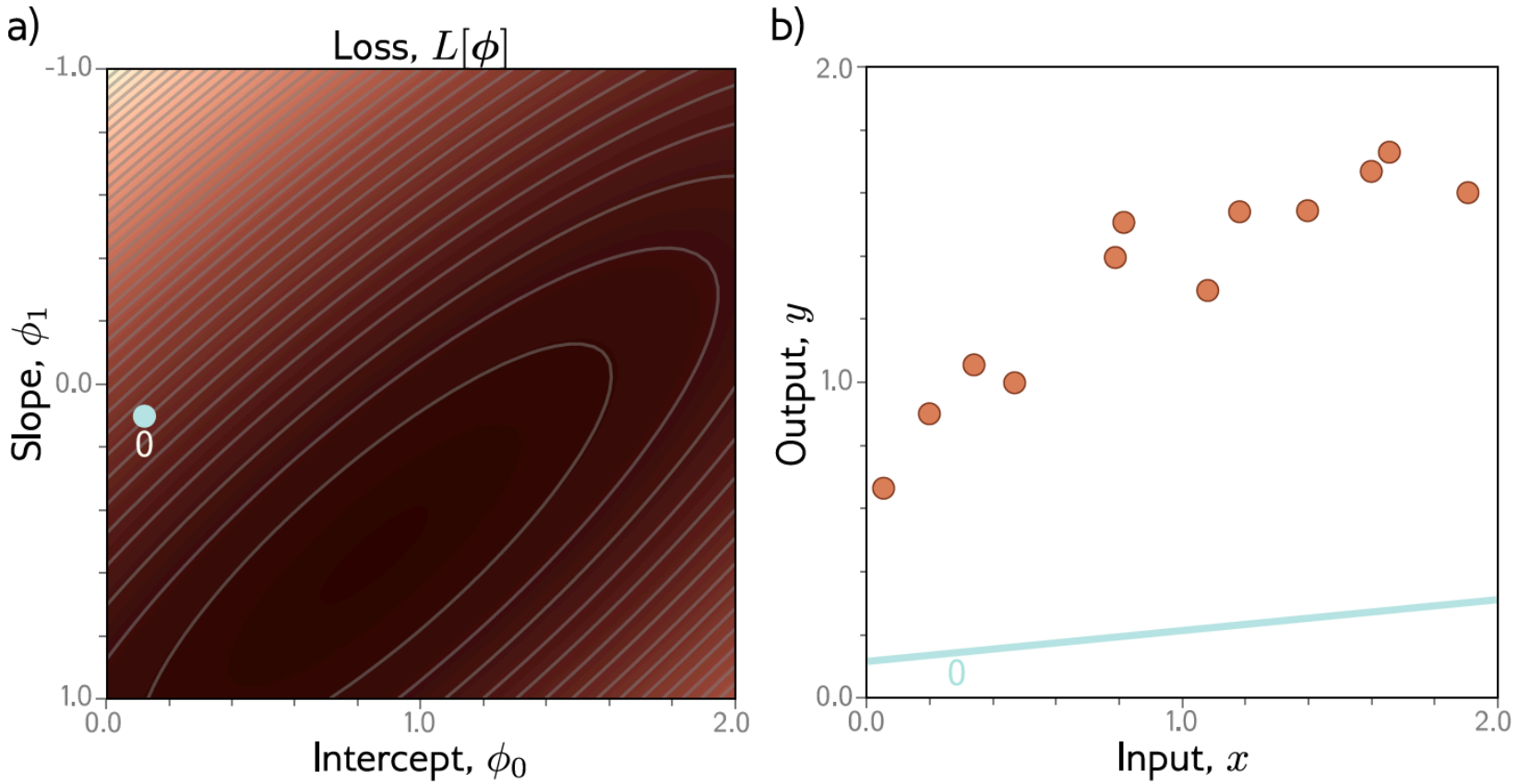
1. **Cálculo:** Calcule o gradiente da função de custo $\mathcal{L}$ em relação aos parâmetros $\mathbf{w}$.
2. **Atualização:** Atualize os parâmetros dando um "passo" no sentido contrário ao gradiente (descida).

**Fórmula de Atualização Central:**

$$\mathbf{w}_{t+1} = \mathbf{w}_t - \eta \nabla \mathcal{L}(\mathbf{w}_t)$$

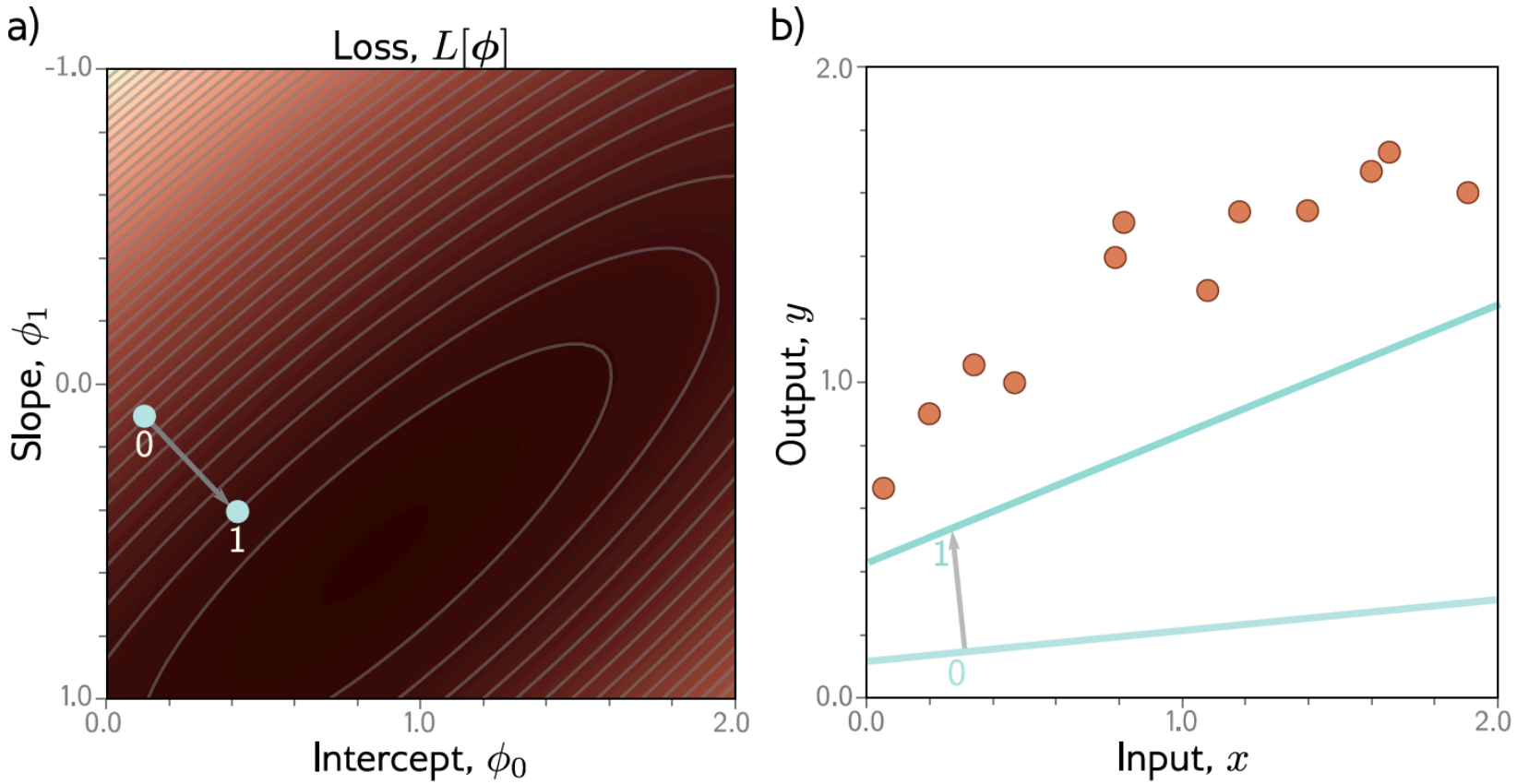
- Onde $\mathbf{w}_t$ são os parâmetros na iteração $t$, e $\eta > 0$ é a **taxa de aprendizado ($\eta$ - learning rate)**, que controla o tamanho do passo.

# Exemplo: Regressão Linear 1D



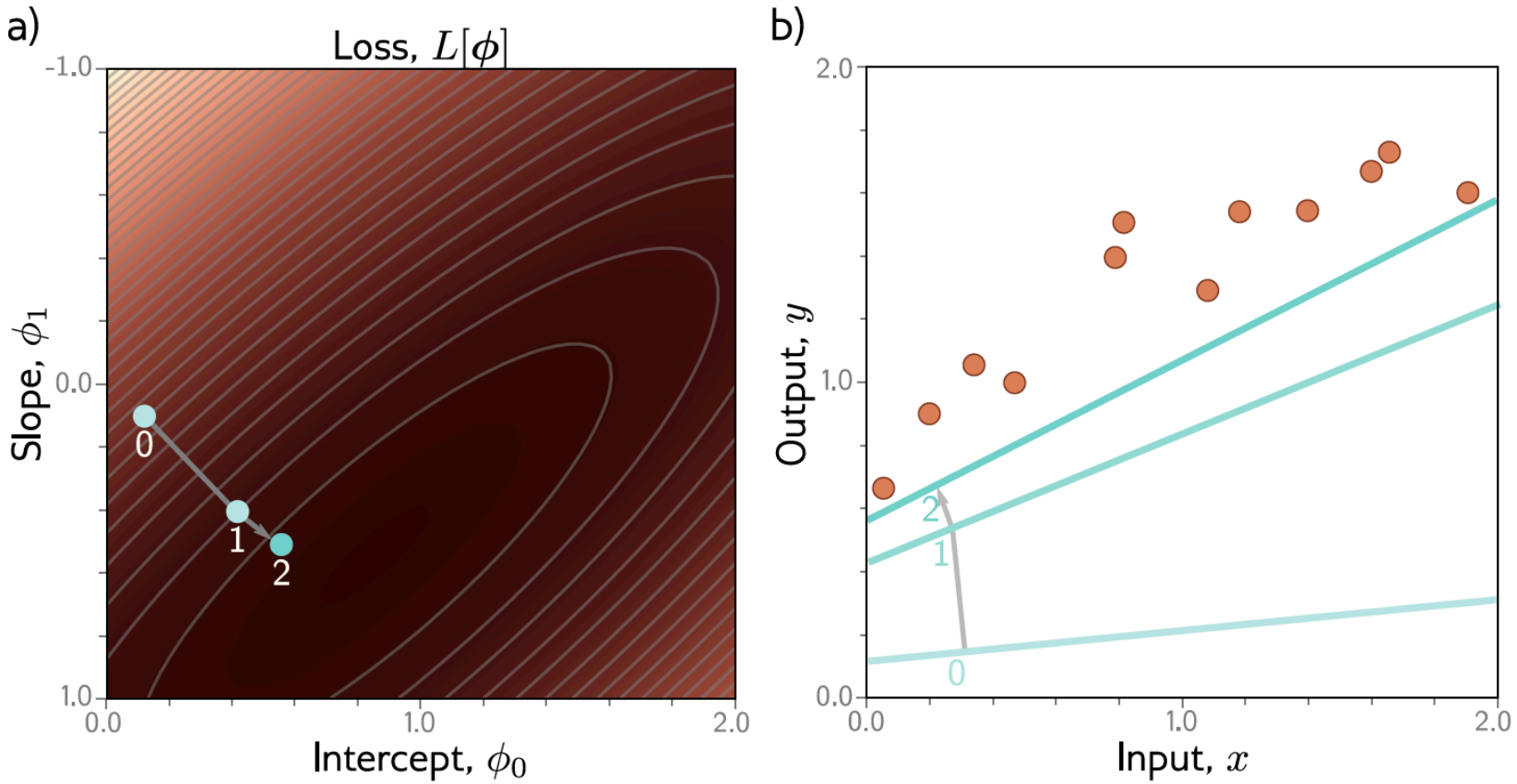

Exemplo de Regressão Linear 1D. Fonte: Simon Prince (Understanding Deep Learning).

# Exemplo: Regressão Linear 1D



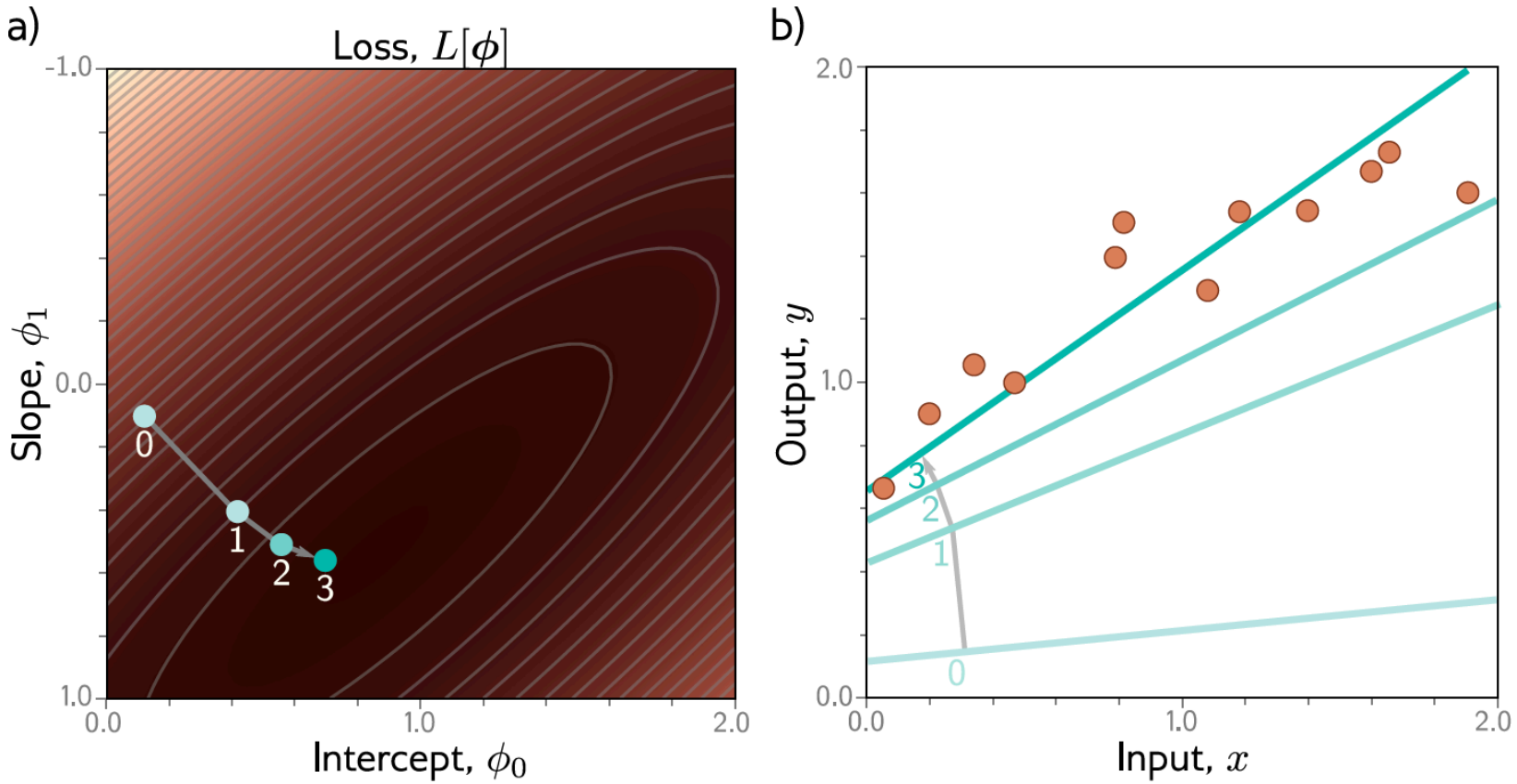

Exemplo de Regressão Linear 1D. Fonte: Simon Prince (Understanding Deep Learning).

# Exemplo: Regressão Linear 1D



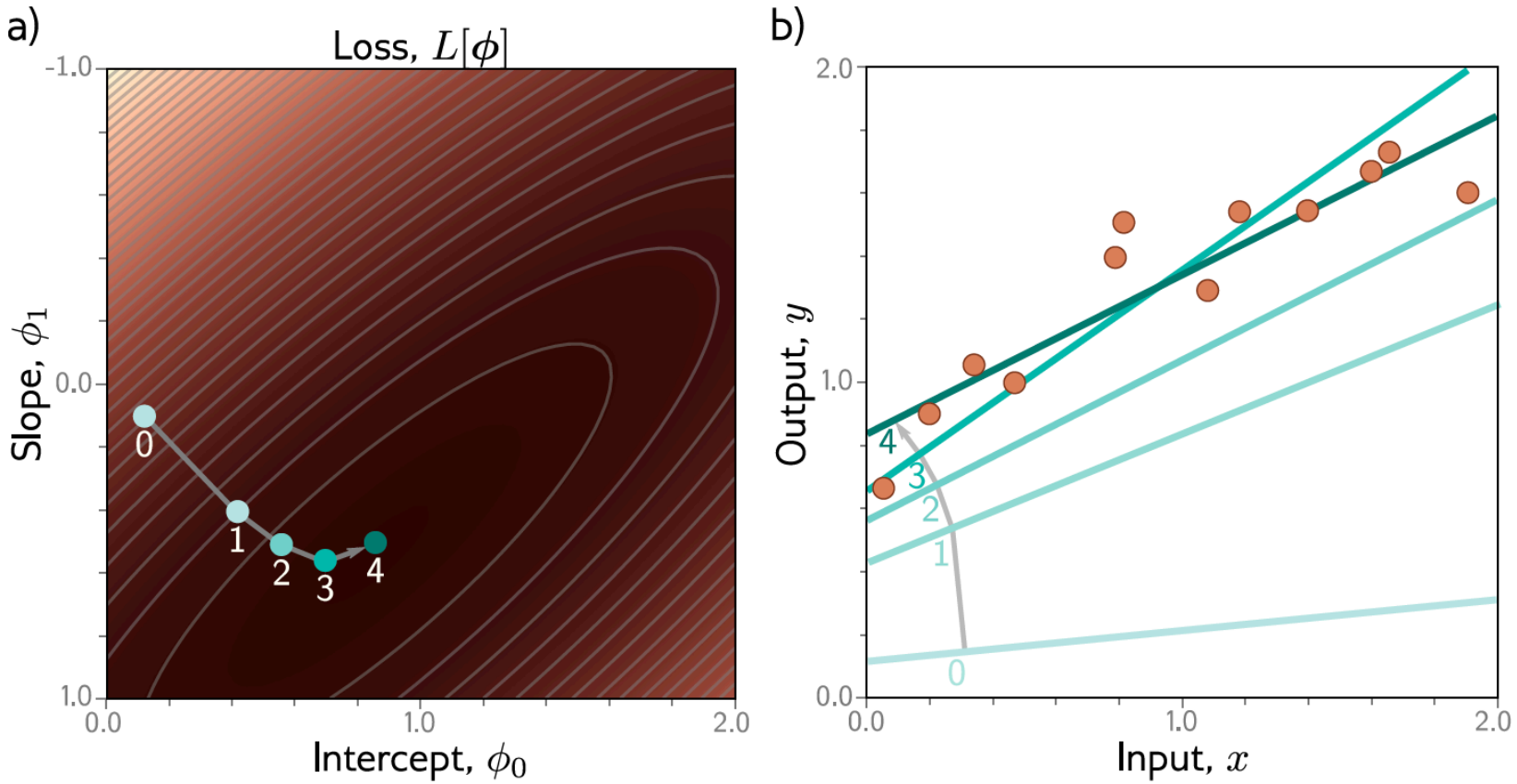

Exemplo de Regressão Linear 1D. Fonte: Simon Prince (Understanding Deep Learning).

# Exemplo: Regressão Linear 1D



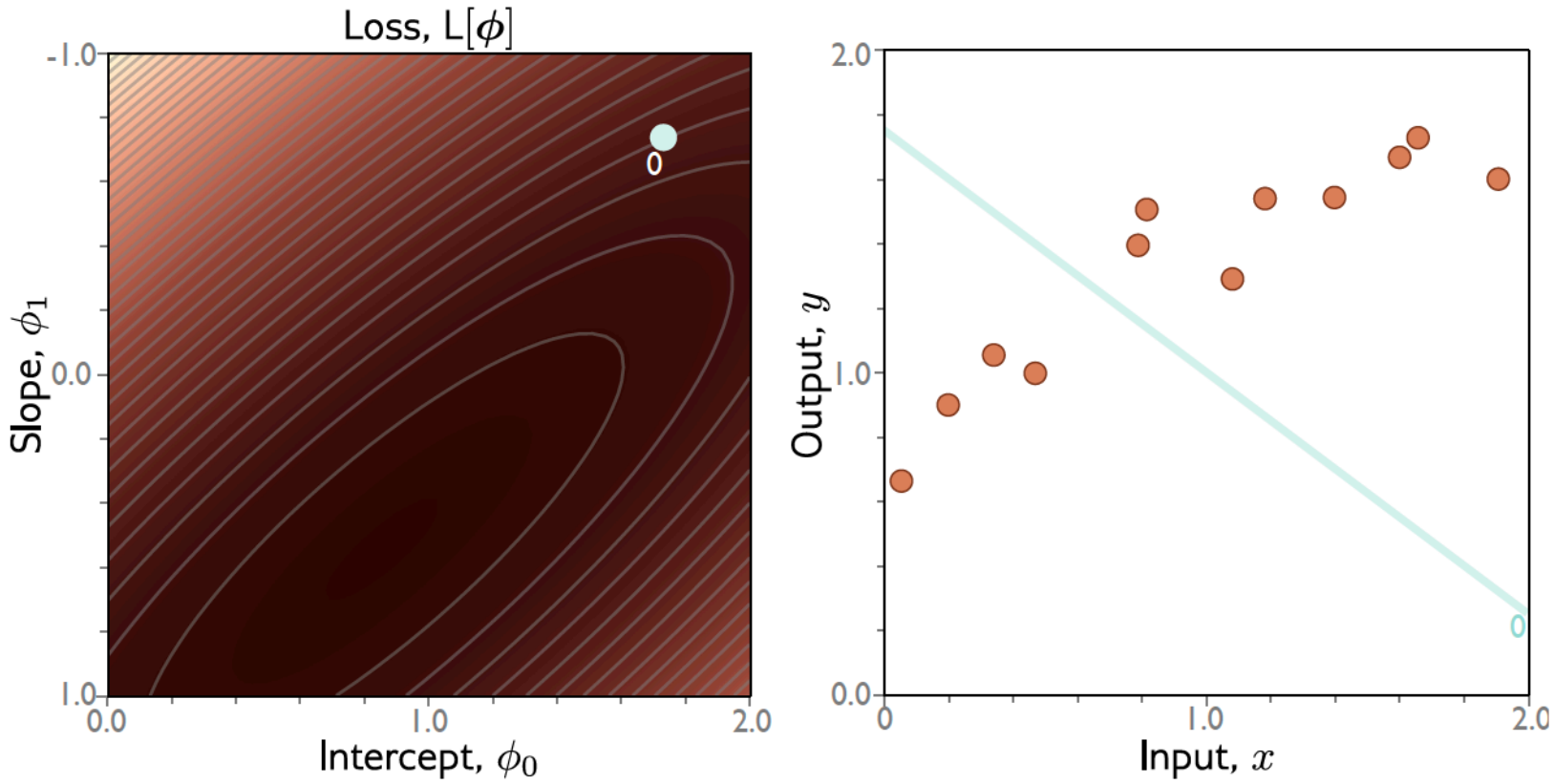

Exemplo de Regressão Linear 1D. Fonte: Simon Prince (Understanding Deep Learning).

# Exemplo: Regressão Linear 1D



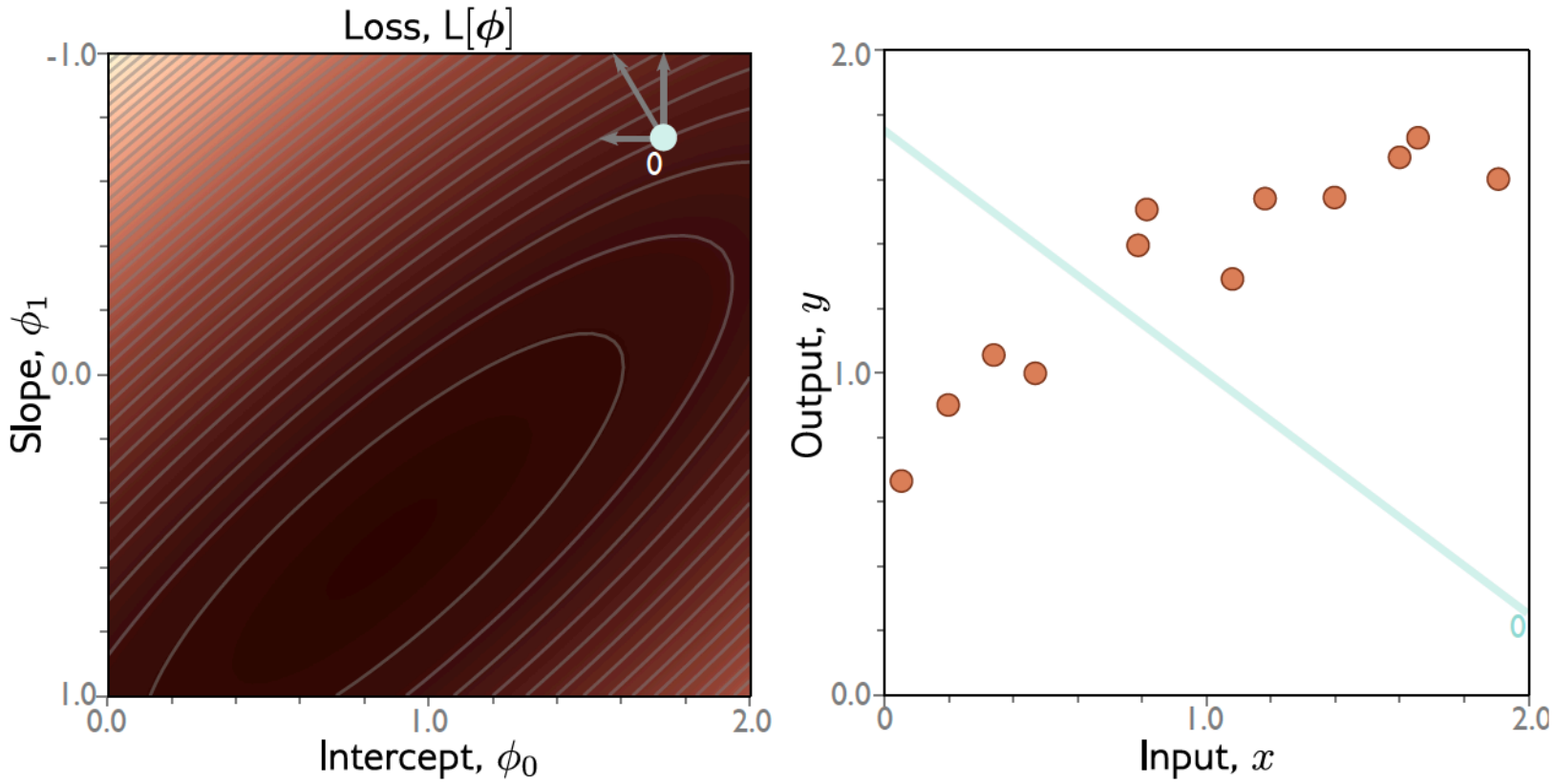

Exemplo de Regressão Linear 1D. Fonte: Simon Prince (Understanding Deep Learning).

# Gradiente Descendente: Exemplo



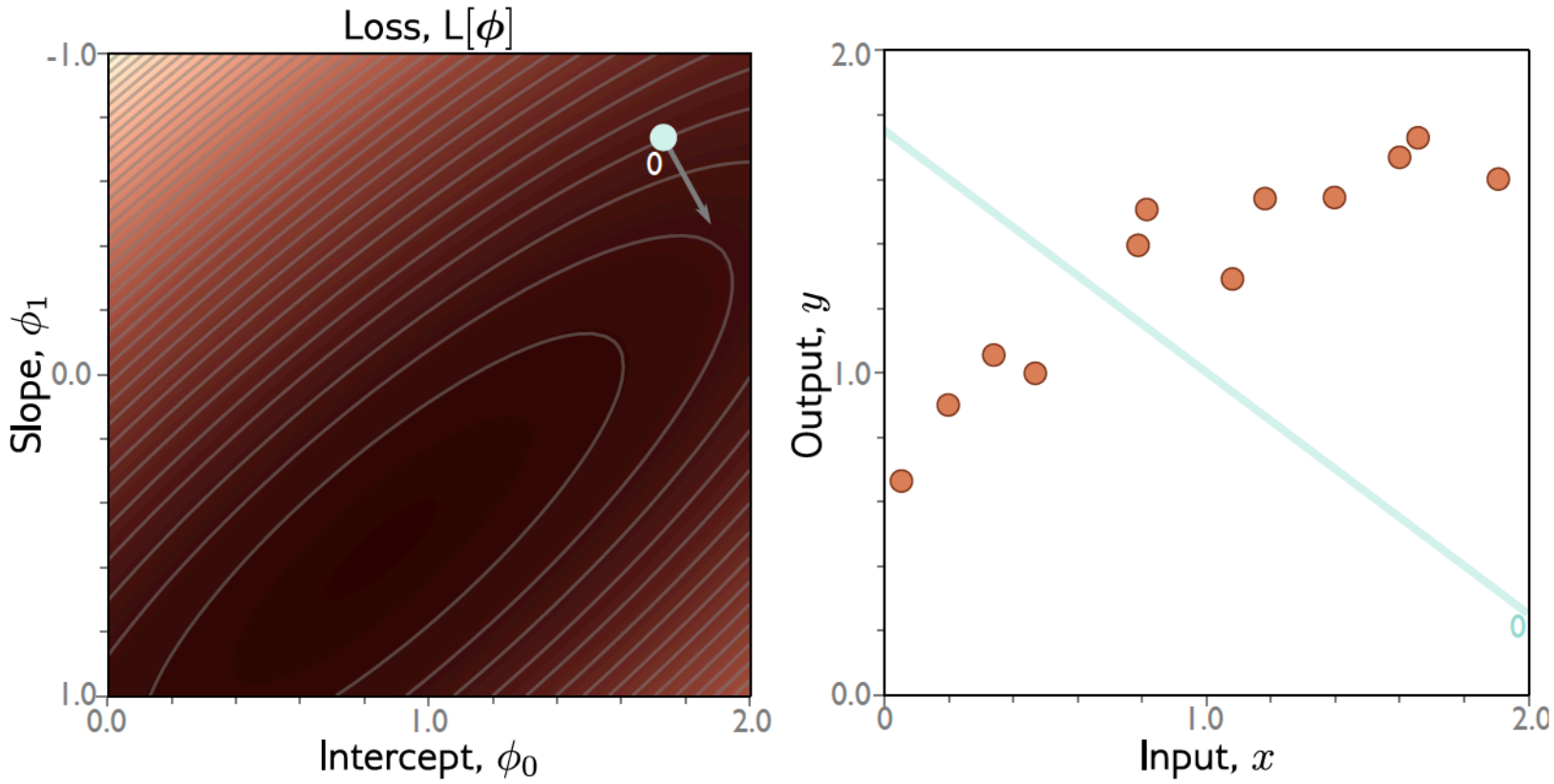

Exemplo de Gradiente Descendente. Fonte: Simon Prince (Understanding Deep Learning).

# Gradiente Descendente: Exemplo




Exemplo de Gradiente Descendente. Fonte: Simon Prince (Understanding Deep Learning).

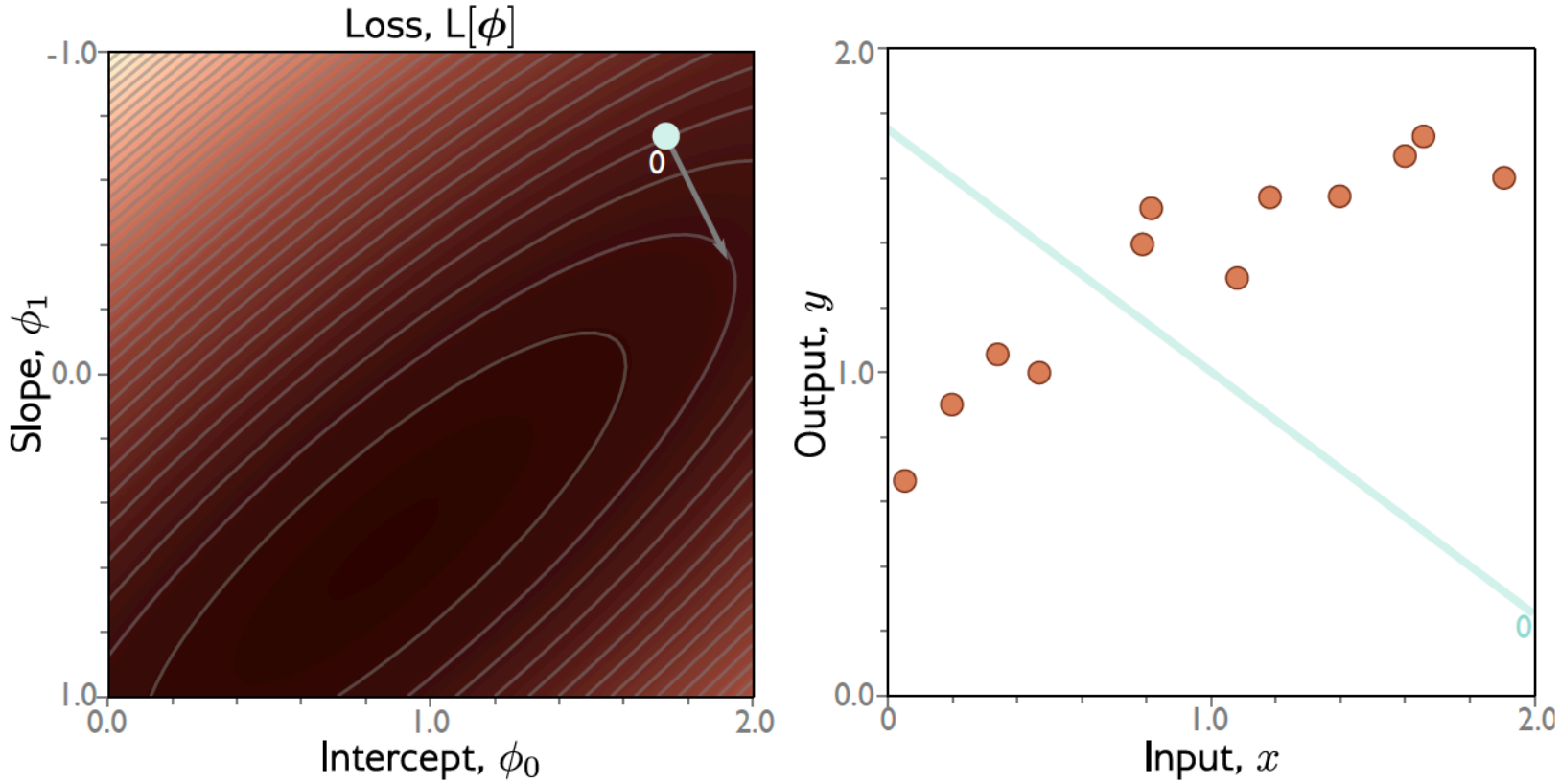
# Gradiente Descendente: Exemplo




Exemplo de Gradiente Descendente. Fonte: Simon Prince (Understanding Deep Learning).

# Gradiente Descendente: Exemplo

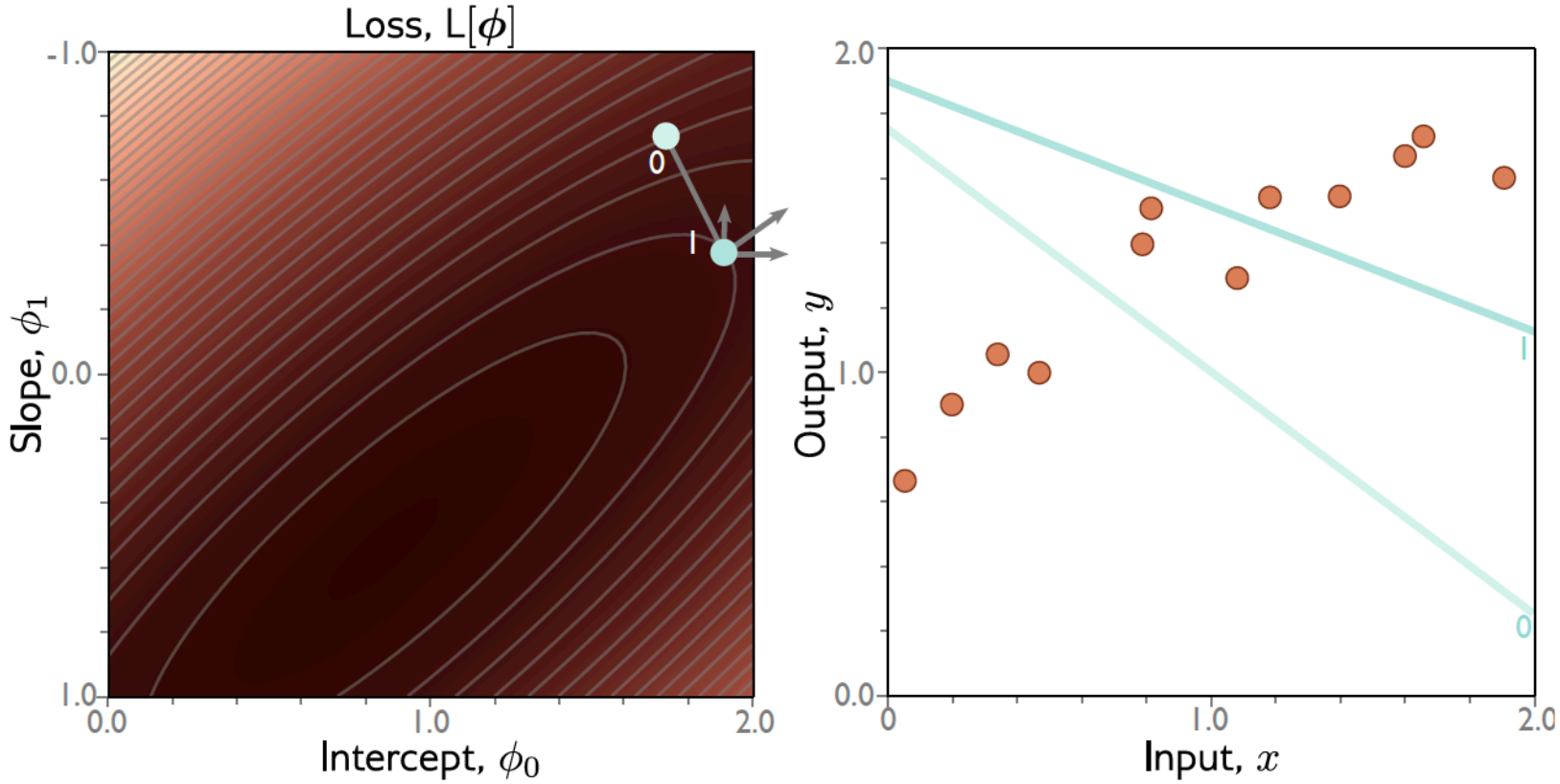
**Efeito da Learning Rate**




Exemplo de Gradiente Descendente. Fonte: Simon Prince (Understanding Deep Learning).

# Gradiente Descendente: Exemplo

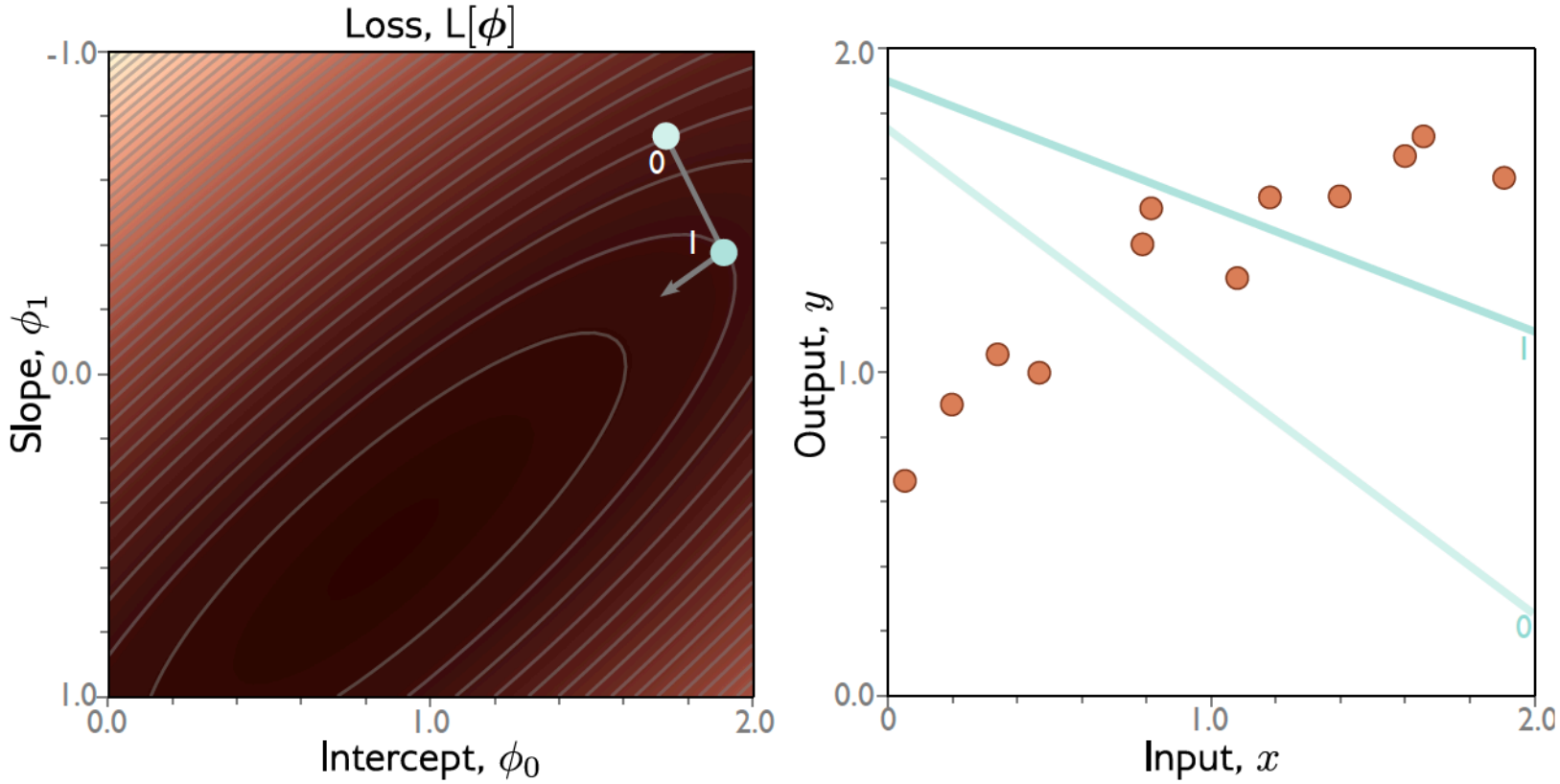
**Próximo passo: Cálculo do Gradiente**




Exemplo de Gradiente Descendente. Fonte: Simon Prince (Understanding Deep Learning).

# Gradiente Descendente: Exemplo

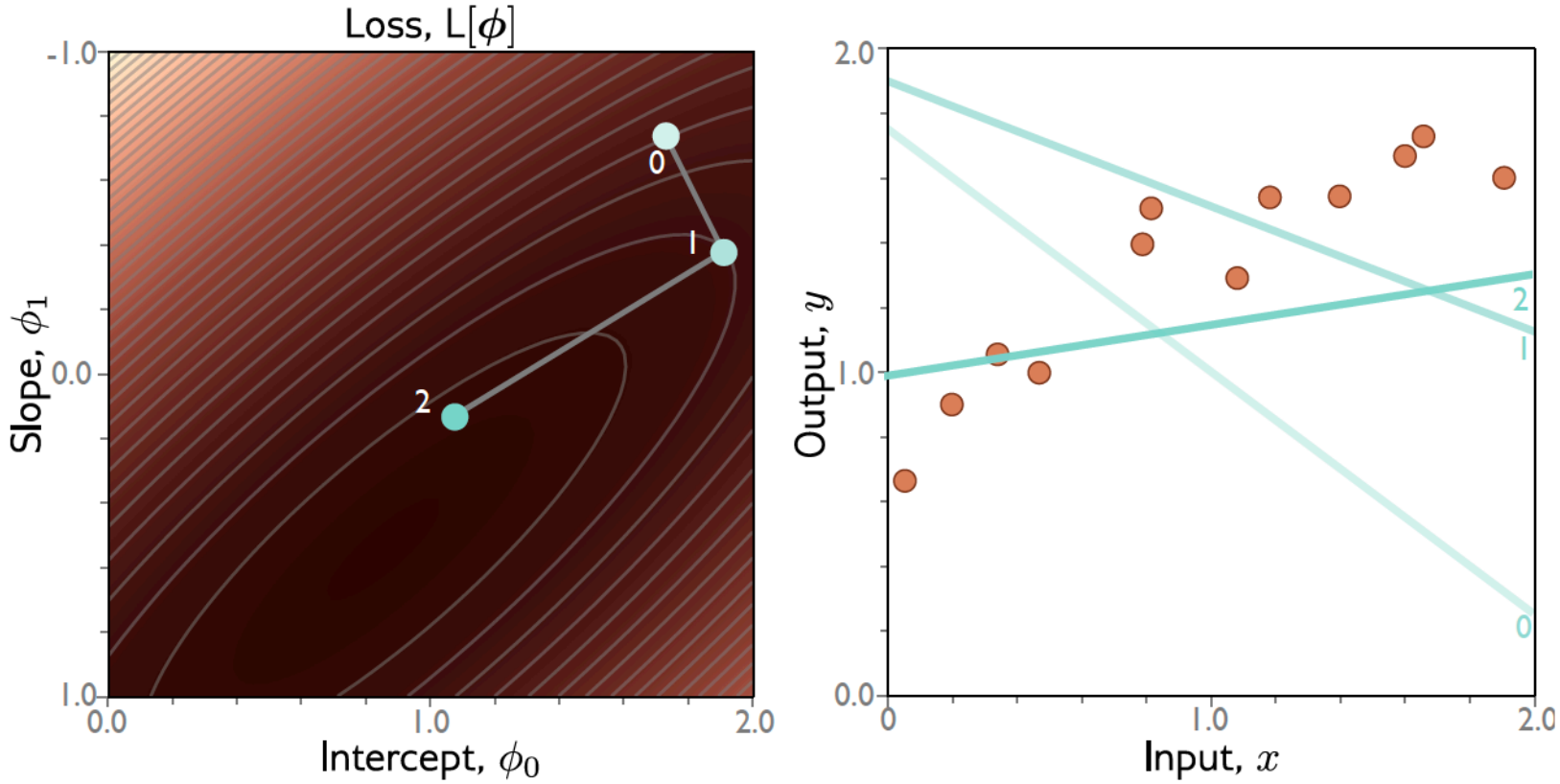
**Próximo passo: Gradiente Negativo**




Exemplo de Gradiente Descendente. Fonte: Simon Prince (Understanding Deep Learning).

# Gradiente Descendente: Exemplo

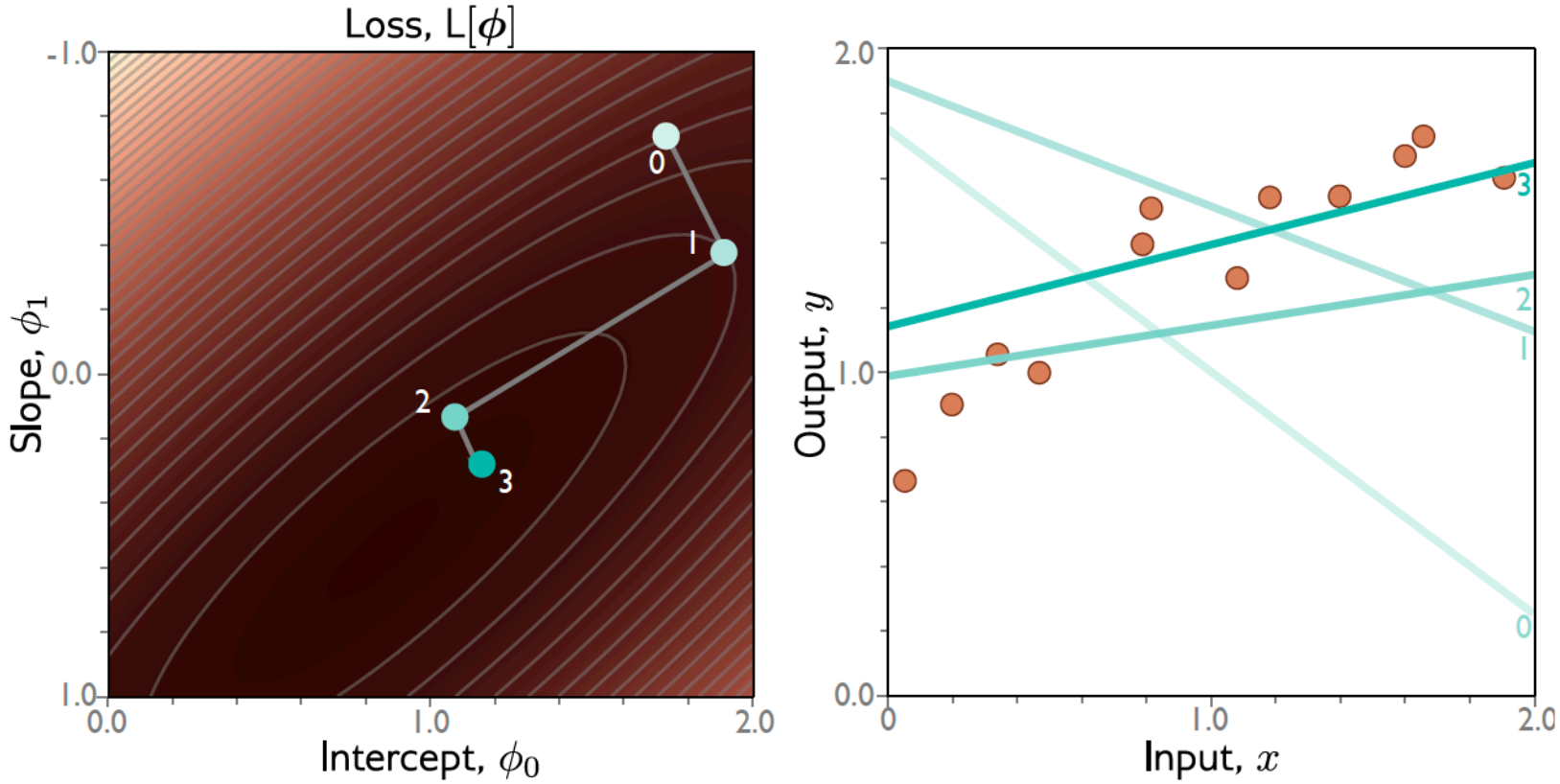
**Próximo passo**




Exemplo de Gradiente Descendente. Fonte: Simon Prince (Understanding Deep Learning).

# Gradiente Descendente: Exemplo

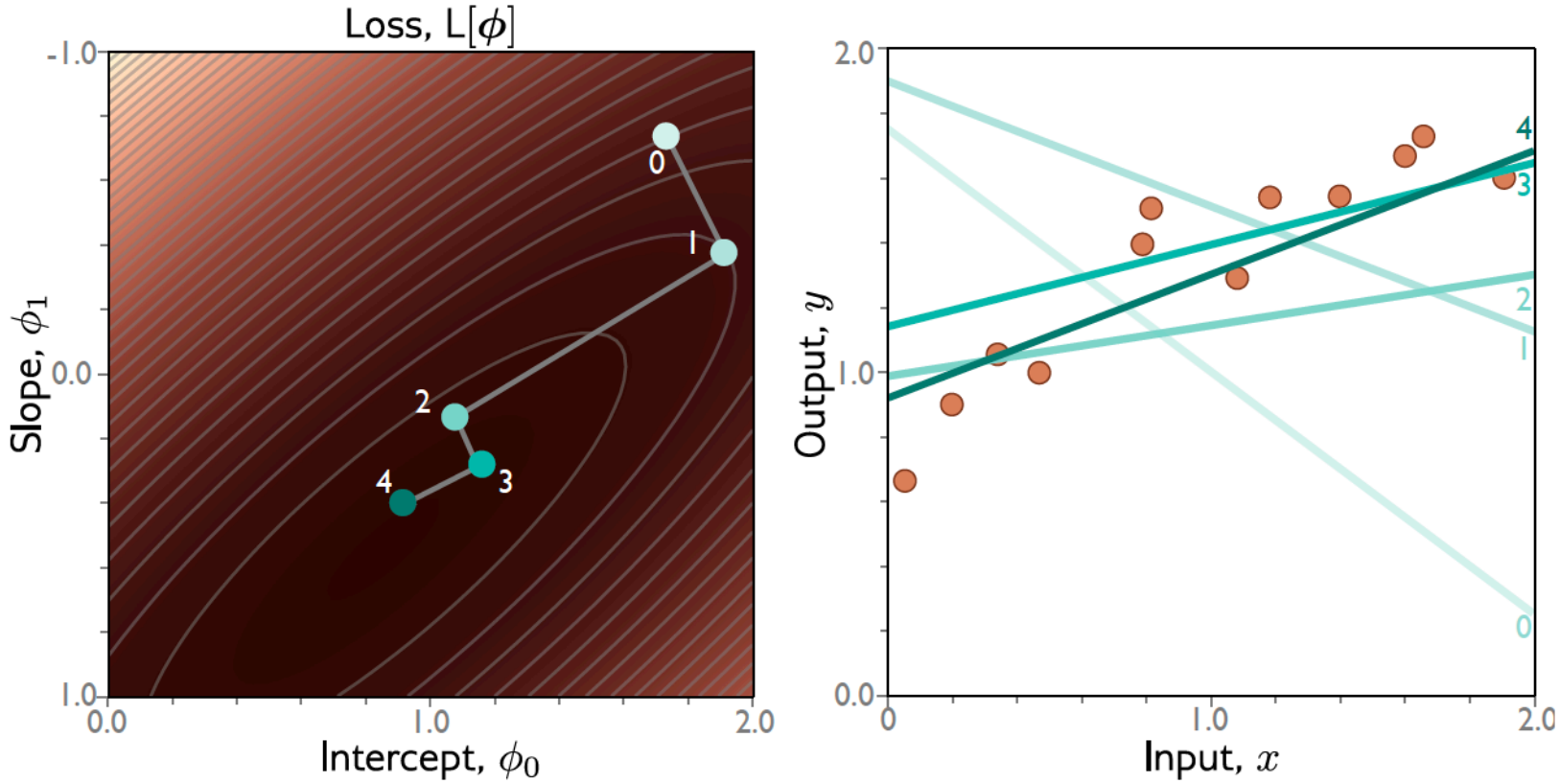
**Próximo passo**




Exemplo de Gradiente Descendente. Fonte: Simon Prince (Understanding Deep Learning).

# Gradiente Descendente: Exemplo

**Próximo passo**




Exemplo de Gradiente Descendente. Fonte: Simon Prince (Understanding Deep Learning).

# Batch Gradient Descent (BGD)

O BGD é a forma mais pura do algoritmo, utilizando o **conjunto de treinamento completo** ( $N$ exemplos) para calcular o gradiente em cada iteração.

- O gradiente calculado é a média de todas as perdas individuais $l_i$:

$$\nabla \mathcal{L}(\mathbf{w}) = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} \nabla l_i(\mathbf{w})$$

- **Vantagem:** O gradiente é exato (para o conjunto de treinamento), resultando em convergência estável e suave.
- **Desvantagem:** É computacionalmente caro, pois requer a passagem (forward/backward) por todos os dados em cada passo de atualização.

In [2]:

```python
import numpy as np

# Função simples: para d=2, temos f(w_1,w_2) = w_1*w_1 + w_2*w_2
def f(w):
    return np.sum(w*w)

# Gradiente (deriavada) da função
def grad(w):
    return 2*w
```

In [33]:

```
def gradient_descent(func, grad_func,
                     w_init, n_epochs=100,
                     lr=0.001, verbose=0):
    i = 0
    w = w_init

    while i < n_epochs:
        # conduct gradient update step
        delta_w = -lr * grad_func(w)
        w = w + delta_w

        if verbose > 0:
            print(f"f = {func(w)};\tw: {w}")

        i += 1

    return w
```

In [34]:

```
# Ponto de início
w_init = np.array([10,10])
# Learning rate
lr = 0.01
# Aplica gradient descent
w_opt = gradient_descent(
    f, grad, w_init, n_epochs=10,
    lr=lr, verbose=1)
```

```
f = 192.08000000000004; w: [9.8 9.8]
f = 184.47363200000004; w: [9.604 9.604]
f = 177.1684761728;     w: [9.41192 9.41192]
f = 170.15260451635714; w: [9.2236816 9.2236816]
f = 163.41456137750941; w: [9.03920797 9.03920797]
f = 156.94334474696007; w: [8.85842381 8.85842381]
f = 150.72838829498042; w: [8.68125533 8.68125533]
f = 144.75954411849915; w: [8.50763023 8.50763023]
f = 139.0270661714066;  w: [8.33747762 8.33747762]
f = 133.5215943510189;  w: [8.17072807 8.17072807]
```

# Stochastic Gradient Descent (SGD)

O SGD modifica o BGD calculando o gradiente com base em apenas um único exemplo de treinamento ($|\mathcal{S}| = 1$).

- O gradiente $\nabla l_i(\mathbf{w})$ é calculado para um exemplo $i$ amostrado aleatoriamente:

$$\mathbf{w}_{t+1} = \mathbf{w}_t - \eta \nabla l_i(\mathbf{w}_t)$$

- **Vantagem:** É muito mais rápido, pois a complexidade por atualização não cresce com $N$. O ruído adicionado pode ajudar a escapar de mínimos locais e pontos de sela.
- **Desvantagem:** O gradiente é ruidoso (alta variância). A convergência é ruidosa e instável.

**Taxa de Aprendizado (Learning Rate):** Em SGD, é crucial diminuir $\eta$ ao longo do tempo (schedule), pois o ruído inerente impede a convergência tradicional.

# Mini-Batch Gradient Descent (M-BGD)

O M-BGD (ou simplesmente SGD) é o padrão moderno, utilizando um subconjunto $\mathcal{B}$ de $M$ exemplos ($1 < M < N$).

- **Mini-Batch:** Um pequeno grupo de amostras, geralmente com tamanho $M \in$ (potências de 2 são comuns).
- O gradiente é calculado como a média das perdas no mini-batch:

$$\nabla \mathcal{L}_{\mathcal{B}}(\mathbf{w}) = \frac{1}{M} \sum_{i \in \mathcal{B}} \nabla l_i(\mathbf{w})$$

**Benefício do M-BGD:** M-BGD equilibra a estabilidade do BGD (estimativa menos ruidosa que SGD puro) com a eficiência do SGD (não precisa processar todos os dados). O paralelismo de hardware (GPUs) é otimizado para o processamento em lotes.

# Gradient Descent: Resumo dos Algoritmos

| Método | Tamanho do Batch ($M$) | Freq. de Atualização | Custo Computacional |
|---|---|---|---|
| BGD | $N$ (Total de Dados) | Baixa (1/Epoch) | Alto |
| SGD | $1$ | Alta (1/Exemplo) | Baixo |
| M-BGD | $1 < M < N$ | Média (1/Mini-Batch) | Médio |

# O Desafio dos Gradientes em Redes Neurais

Uma rede neural profunda é uma composição massiva de funções (layers ou "gates").

$$\mathcal{L}(\mathbf{x}; \boldsymbol{\phi}) = \mathcal{L} \circ f^{(L)} \circ \sigma^{(L-1)} \circ \cdots \circ \sigma^{(1)} \circ f^{(0)}(\mathbf{x})$$

- **O Problema:** Precisamos calcular $\nabla \mathcal{L}(\boldsymbol{\phi})$ (o gradiente da perda em relação a **cada parâmetro** $\mathbf{W}^{(l)}$ e $\mathbf{b}^{(l)}$ em **todas as camadas** $l$).
- Calcular essas derivadas diretamente é inviável, pois resultaria em expressões extremamente longas e redundantes.

**Solução:** O algoritmo **Back-Propagation (BP)**. BP utiliza a regra da cadeia para calcular o gradiente de forma eficiente, reutilizando cálculos parciais em uma passagem reversa (backward pass) pela rede.

> *Leita também: https://xnought.github.io/backprop-explainer/*

# A Regra da Cadeia (Chain Rule) Revisitada

O BP é fundamentado na Regra da Cadeia do cálculo diferencial.

**1. Caso Simples (Escalar):** Se $z = f(y)$ e $y = g(x)$, a derivada de $z$ em relação a $x$ é o produto das derivadas locais:

$$\frac{dz}{dx} = \frac{dz}{dy} \cdot \frac{dy}{dx}$$

**2. Caso Multidimensional (Jacobianos):** Se $\mathbf{y} = g(\mathbf{x})$ (mapeamento de $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^l$) e $\mathbf{z} = f(\mathbf{y})$ (mapeamento de $\mathbb{R}^l \to \mathbb{R}^m$), a derivada é o produto das matrizes Jacobianas (matrizes de derivadas parciais):

$$J_{f \circ g}(\mathbf{x}) = J_f(g(\mathbf{x}))J_g(\mathbf{x})$$

- Em DL, a perda $\mathcal{L}$ (escalar) depende dos parâmetros $\mathbf{W}$ (matriz), o que torna a notação mais conveniente usando vetores de gradientes.

# Backpropagation: O Forward Pass (Ativações)

Antes de calcular os gradientes, precisamos executar o **Forward Pass** (Passagem para Frente). O Forward Pass calcula as ativações de cada camada, que serão usadas posteriormente no Backward Pass para calcular os gradientes.

**Notação:**

- $\mathbf{x}^{(l)}$: Vetor de ativações da camada $l$.
- $\mathbf{s}^{(l)}$: Vetor de pré-ativações da camada $l$ (somas antes da função $\sigma$).
- $\mathbf{W}^{(l)}, \mathbf{b}^{(l)}$: Parâmetros (pesos e vieses) da camada $l$.
- $\sigma$: Função de ativação (e.g., ReLU, $\mathrm{Tanh}$).

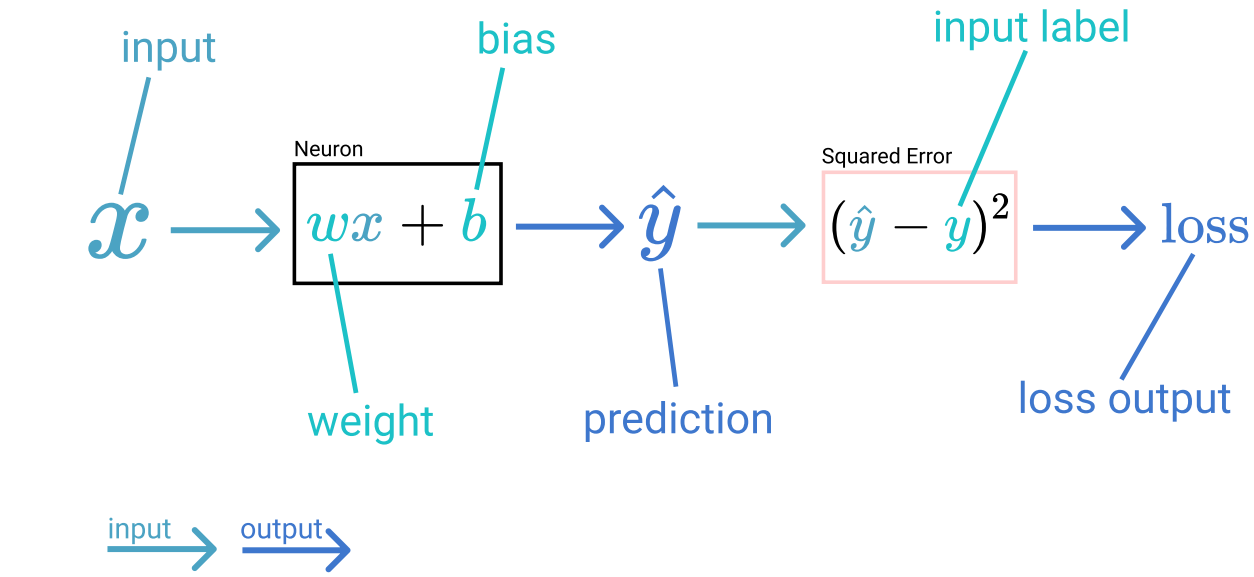
**Cálculos Iterativos:**

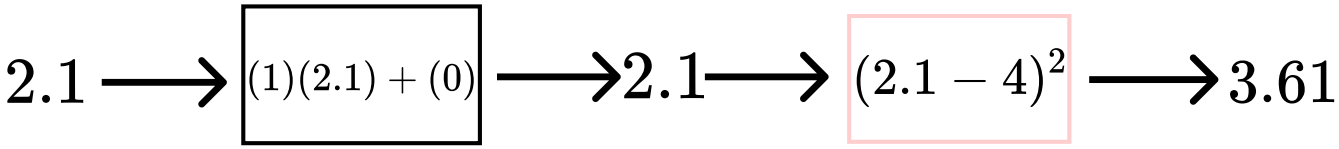
$$\mathbf{x}^{(0)} = \mathbf{x} \quad (\mathrm{Input})$$

$$\mathbf{s}^{(l)} = \mathbf{W}^{(l)}\mathbf{x}^{(l-1)} + \mathbf{b}^{(l)} \quad (\mathrm{soma\ ponderada})$$

$$\mathbf{x}^{(l)} = \sigma(\mathbf{s}^{(l)}) \quad (\mathrm{ativação})$$

- **Requisito:** Todas as pré-ativações $\mathbf{s}^{(l)}$ e ativações $\mathbf{x}^{(l)}$ devem ser **armazenadas** na memória (trade-off de memória).




Forward Pass. Fonte: Backpropagation Explainer.

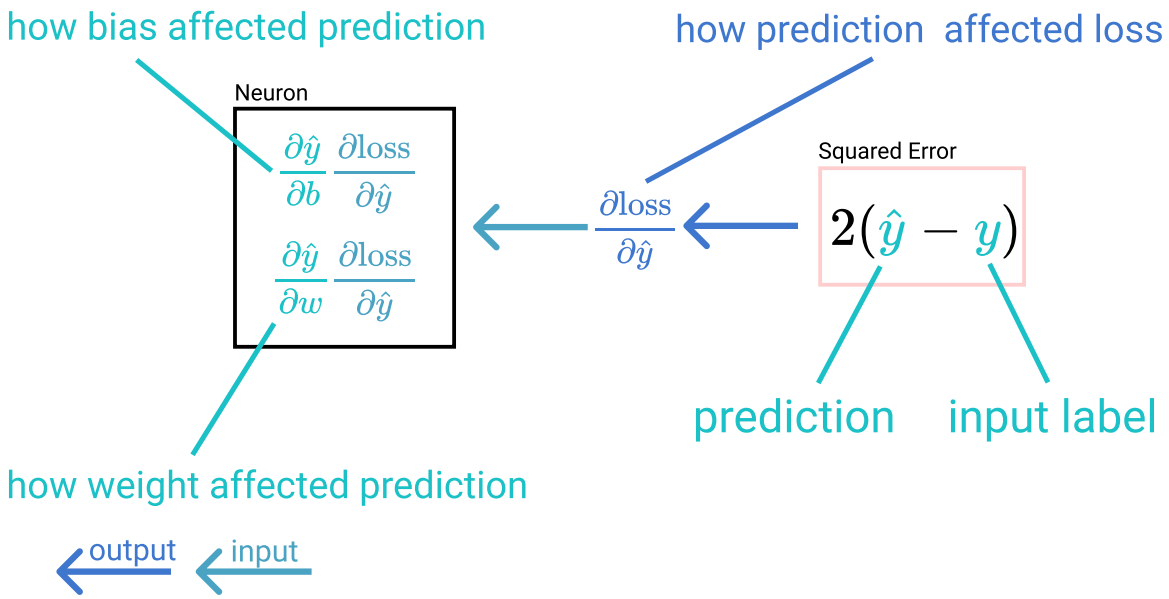
# Backpropagation: O Backward Pass

O Backward Pass calcula os gradientes $\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \mathbf{W}^{(l)}}$ e $\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \mathbf{b}^{(l)}}$ trabalhando de **trás para frente** (da camada $L$ para a camada 1), utilizando a Regra da Cadeia.

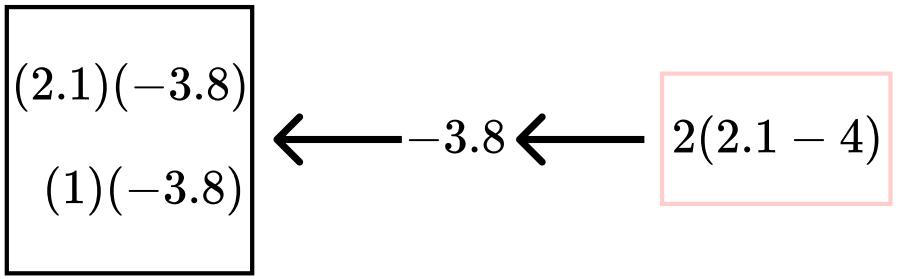
**Passo Inicial (Camada de Saída $L$): Gradiente da Perda $\mathcal{L}$**

1. **Cálculo $\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \mathbf{x}^{(L)}}$:** Calcule o gradiente da perda $\mathcal{L}$ em relação à saída da rede $\mathbf{x}^{(L)}$ (depende diretamente da função de perda escolhida).
2. **Cálculo $\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \mathbf{s}^{(L)}}$ (Erro de Saída):** Propague este gradiente através da função de ativação $\sigma$ da camada $L$:
    - Isto é um produto pontual (elemento a elemento, $\odot$) entre o gradiente da camada seguinte e a derivada local da função de ativação $\sigma'$.

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \mathbf{s}^{(L)}} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \mathbf{x}^{(L)}} \odot \sigma'(\mathbf{s}^{(L)})$$




Backward Pass. Fonte: Backpropagation Explainer.




Backward Pass. Fonte: Backpropagation Explainer.

Calculamos os gradientes:

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \mathbf{w}} = -7.68 \qquad \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \mathbf{b}} = -3.8$$

Atualizamos os parâmetros (considere a learning rate $\eta = 0.01$):

$$w := w - \eta \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \mathbf{w}} = (1) - (0.01) \cdot (-7.68) = 1.0798$$

$$b := b - \eta \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \mathbf{b}} = (0) - (0.01) \cdot (-3.8) = 0.038$$

Com os novos parâmetros, temos um loss menor:

$$\mathcal{L} = ((1.0798)(2.1) + 0.038) - 4)^2 = 2.87$$

# Backward Pass: Propagação do Erro ($\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \mathbf{x}^{(l-1)}}$)

---

O erro (gradiente da perda) é propagado de volta da pré-ativação $\mathbf{s}^{(l)}$ para a ativação da camada anterior $\mathbf{x}^{(l-1)}$.

- Isto é realizado através da multiplicação pelo **transposto ($\mathbf{W}^{(l)T}$) da matriz de pesos $\mathbf{W}^{(l)}$**.
    - Este cálculo informa como uma mudança na camada anterior $\mathbf{x}^{(l-1)}$ afeta a perda $\mathcal{L}$ através das conexões em $\mathbf{W}^{(l)}$.

**Fórmula de Propagação (Gradients w.r.t. Activations):**

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \mathbf{x}^{(l-1)}} = \left(\mathbf{W}^{(l)}\right)^T \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \mathbf{s}^{(l)}}$$

**Continuação:** Após calcular $\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \mathbf{x}^{(l-1)}}$, a Regra da Cadeia é aplicada novamente para obter $\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \mathbf{s}^{(l-1)}}$ e assim sucessivamente.

# Backward Pass: Gradientes dos Parâmetros

Uma vez que o vetor de erro $\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \mathbf{s}^{(l)}}$ (o "erro" da camada $l$) é conhecido, o cálculo dos gradientes dos parâmetros $\mathbf{W}^{(l)}$ e $\mathbf{b}^{(l)}$ é direto e local.

**1. Gradiente dos Pesos ($\mathbf{W}^{(l)}$):** A derivada da perda em relação ao peso $\mathbf{W}_{i,j}^{(l)}$ é o produto do erro $\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \mathbf{s}_i^{(l)}}$ pela ativação da camada anterior $\mathbf{x}_j^{(l-1)}$.

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \mathbf{W}^{(l)}} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \mathbf{s}^{(l)}} \left( \mathbf{x}^{(l-1)} \right)^T$$

**2. Gradiente dos Vieses ($\mathbf{b}^{(l)}$):** O gradiente do viés é simplesmente o erro da camada:

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \mathbf{b}^{(l)}} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \mathbf{s}^{(l)}}$$

# Frameworks Modernos: Diferenciação Algorítmica

Felizmente, não precisamos implementar o Backward Pass manualmente em cada projeto.

- Frameworks de *Deep Learning* (PyTorch, TensorFlow) utilizam **Diferenciação Algorítmica** (Algorithmic Differentiation) para calcular gradientes automaticamente.
- Cada componente (função linear, ReLU, perda) sabe como calcular suas próprias derivadas locais.
- O framework constrói o grafo computacional e usa a regra da cadeia para compilar o Backward Pass, garantindo eficiência máxima (muitas vezes duas vezes mais caro que o Forward Pass).

```python
import torch.optim as optim

# Definição do modelo e perda (omissos)
# model = ...
# loss = ...

# 1. Zera gradientes (evita acumulação)
optimizer.zero_grad()

# 2. Forward Pass
predictions = model(inputs)
loss_value = criterion(predictions, targets)

# 3. Backward Pass (Cálculo Automático)
loss_value.backward() # Computa dL/dW para todos os W

# 4. Atualização (Gradient Descent)
optimizer.step() # w ← w − η ∗ dL/dw
```

In [35]:

```
import torch
import torch.nn as nn

torch.manual_seed(1)
w = torch.empty(2, 3)
nn.init.xavier_normal_(w)
print(w)
```

```
tensor([[ 0.4183,  0.1688,  0.0390],
        [ 0.3930, -0.2858, -0.1051]])
```

In [41]:

```
w = torch.tensor(1.0, requires_grad=True)
b = torch.tensor(0.5, requires_grad=True)

x = torch.tensor([1.4])
y = torch.tensor([2.1])
z = torch.add(torch.mul(w, x), b)

loss = (y-z).pow(2).sum() # Erro Quadrático
loss.backward()

print('dL/dw : ', w.grad)
print('dL/db : ', b.grad)

print(2 * x * ((w * x + b) - y)) # Computando dL/dw
```

```
dL/dw :  tensor(-0.5600)
dL/db :  tensor(-0.4000)
tensor([-0.5600], grad_fn=<MulBackward0>)
```

# Otimizadores

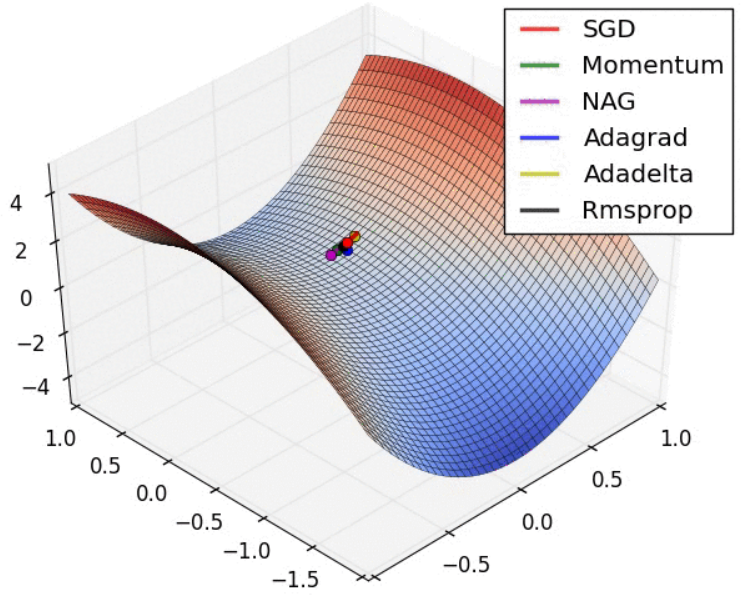
Otimizador mais utilizado é o Adam (Adaptive moment estimation):

$$m_t = \beta_1 m_{t-1} + (1 - \beta_1)\nabla_\theta \mathcal{L}$$

$$v_t = \beta_2 v_{t-1} + (1 - \beta_2)(\nabla_\theta \mathcal{L})^2$$

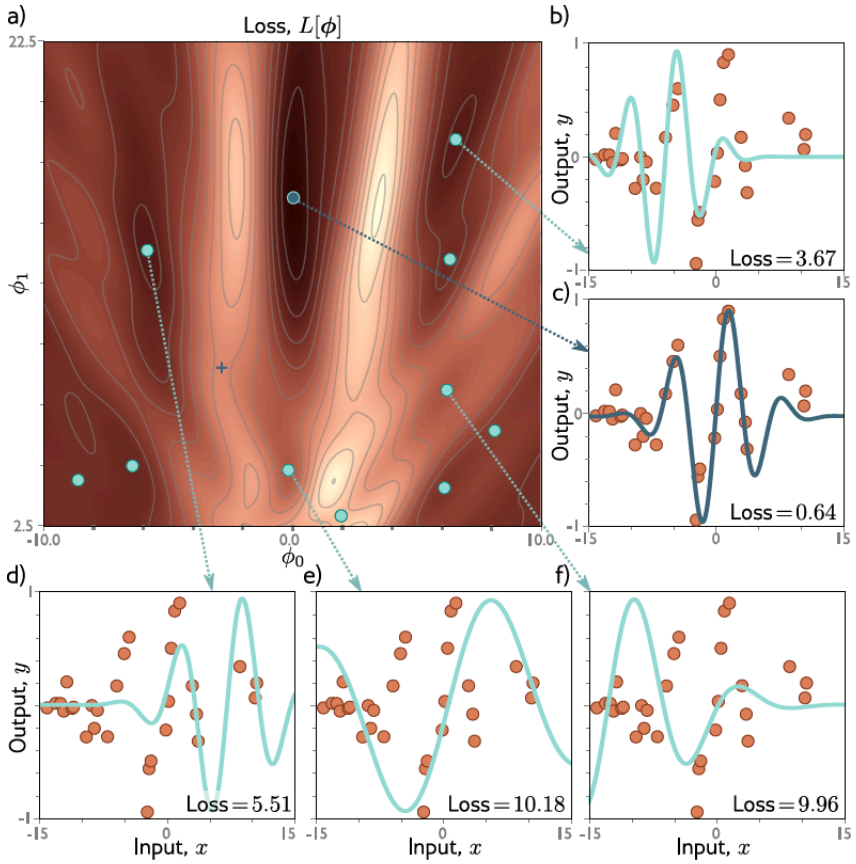
$$\hat{m}_t = \frac{m_t}{1 - \beta_1^t}, \quad \hat{v}_t = \frac{v_t}{1 - \beta_2^t}$$

$$\theta_{t+1} = \theta_t - \eta \frac{\hat{m}_t}{\sqrt{\hat{v}_t} + \epsilon}$$



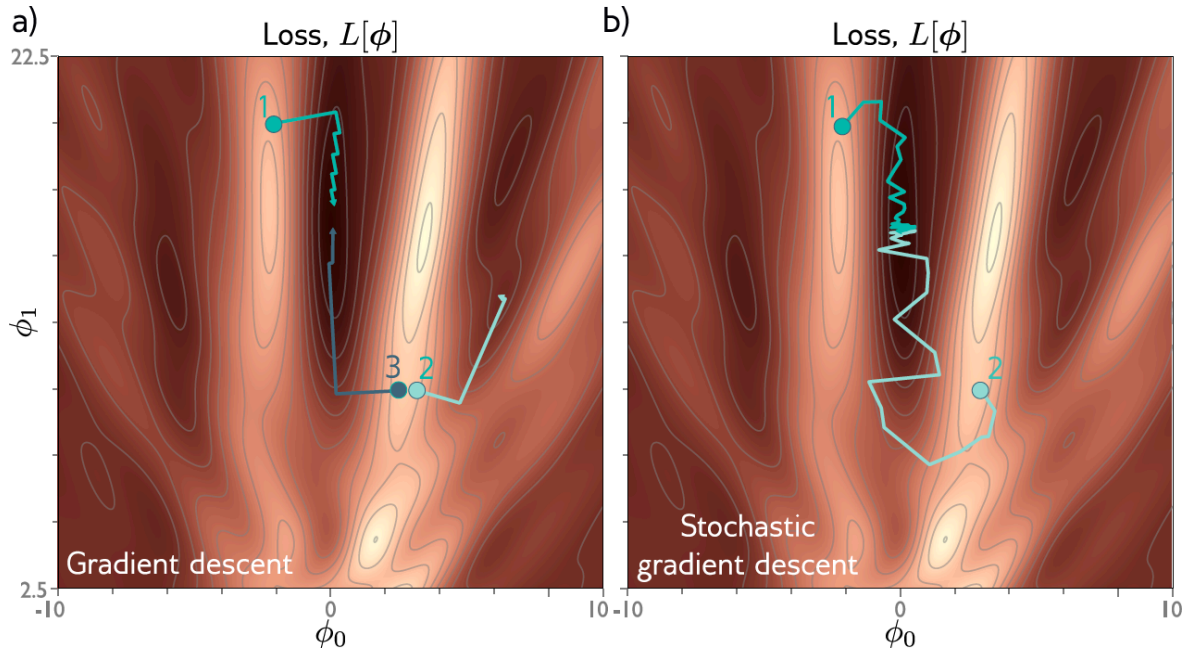

Otimizadores em Deep Learning. Fonte: Analytics Vidhya.

# Landscape da função de loss




Mínimos locais e globais. Fonte: Simon Prince (Understanding Deep Learning).

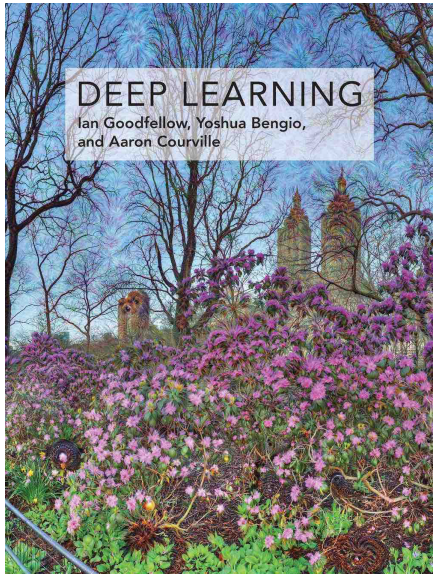
# Otimização por Gradiente Descendente




GD versus SGD. Fonte: Simon Prince (Understanding Deep Learning).

# Resumo

- Treinamento é a busca por $\operatorname{argmin}[\mathcal{L}(\phi)]$.
- *Gradient Descent* usa o oposto do gradiente para dar passos iterativos em direção ao mínimo.
- *Mini-Batch Gradient Descent* (M-BGD) é o padrão (e o mais robusto).
- Equilibra a baixa variância do BGD e a alta velocidade do SGD puro, além de se beneficiar do paralelismo da GPU.
- *Backpropagation* é o método eficiente para calcular os gradientes de uma composição complexa de funções (rede neural).
- **Otimizadores Adaptativos:** Extensões do SGD, como **Momentum** e **Adam**, ajustam a direção e/ou o tamanho do passo para acelerar a convergência e navegar melhor em paisagens de perda complexas.
- **Leitura Recomendada**: Understanding Optimization in ML with Gradient Descent & implement SGD Regressor from scratch




**Leitura Recomendada**:
Capítulo 8.

# Perguntas e Discussão

- O *Mini-Batch Gradient Descent* (M-BGD) é o padrão atual. Discuta as razões pelas quais o M-BGD (e não o *Batch Gradient Descent* puro) se tornou o método preferido, considerando a eficiência computacional em arquiteturas modernas (GPUs) e as propriedades de convergência.
- Funções de custo em *Deep Learning* são tipicamente não-convexas. A literatura sugere que, para redes profundas e largas, mínimos locais com alto custo são raros. Contudo, o M-BGD introduz ruído que pode ajudar a **escapar de mínimos locais**. Como a natureza ruidosa do SGD se manifesta na trajetória de otimização e por que isso é crucial para evitar pontos de sela (*saddle points*) em espaços de alta dimensão?
- *Backpropagation* (BP) é essencial porque evita o cálculo redundante de gradientes via regra da cadeia. O que exatamente precisa ser armazenado durante o *Forward Pass* para que o *Backward Pass* funcione?
- O otimizador Adam (Adaptive moment estimation) combina ideias do Momentum e do AdaGrad. Explique o papel da normalização (escalonamento pelo quadrado da média dos gradientes) no Adam e como isso ajuda a **equilibrar as taxas de atualização** entre diferentes camadas ou parâmetros do modelo.